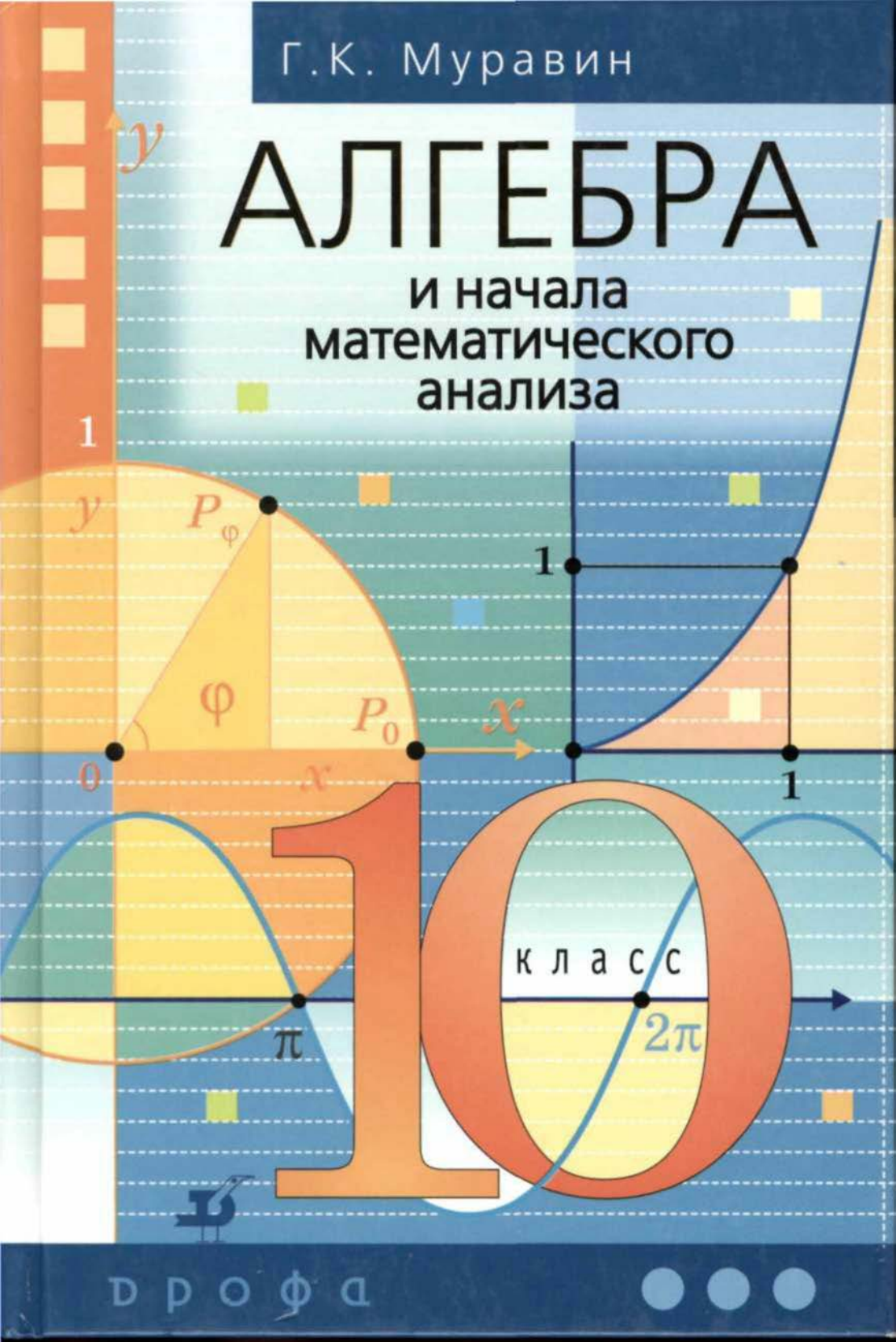


Г.К. Муравин

АЛГЕБРА

и начала
математического
анализа



д р о ф а



Г. К. Муравин

15.1.2013 14:08:39

АЛГЕБРА

и начала математического анализа

Учебник
для общеобразовательных
учреждений

Рекомендовано
Министерством образования
и науки
Российской Федерации

6-е издание, стереотипное



Москва



ДРОФА

2013

УДК 373.167.1:51

ББК 22.1я72

М91

Муравин, Г. К.

М91 Алгебра и начала математического анализа. 10 кл. : учеб. для общеобразоват. учреждений / Г. К. Муравин. — 6-е изд., стереотип. — М. : Дрофа, 2013. — 287, [1] с. : ил.

ISBN 978-5-358-12647-3

Новый учебник по курсу алгебры и началам математического анализа написан в соответствии с программой по математике. Теоретический материал в нем разбит на обязательный и дополнительный. Каждая глава завершается домашними контрольными работами, а каждый пункт главы — контрольными вопросами и заданиями.

Упражнения разделены на три группы. Кроме того, предлагаются и дополнительные задания, предназначенные только сильным ученикам. В книге имеется раздел «Ответы. Советы. Решения», в котором автор рассматривает решения наиболее трудных задач.

Данный учебник ориентирует учителя на использование дифференцированного зачета как одной из форм контроля знаний учащихся.

УДК 373.167.1:51

ББК 22.1я72

Учебное издание

Муравин Георгий Константинович

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА **10 класс**

Учебник для общеобразовательных учреждений

Зав. редакцией *О. В. Муравина*. Редактор *Г. Н. Хромова*

Художественный редактор *А. А. Абрамова*

Технические редакторы *В. Ф. Козлова, И. В. Грибова*

Компьютерная верстка *А. В. Маркин, Е. Ю. Пучкова*

Корректоры *Г. И. Мосякина, Е. Е. Никулина*

В соответствии с Федеральным законом от 29.12.2010 г. № 436-ФЗ
знак информационной продукции на данное издание не ставится

Сертификат соответствия № РОСС RU. АЕ51. Н 16238.



Подписано к печати 20.02.13. Формат 60 × 90 1/8. Бумага офсетная.

Гарнитура «Школьная». Усл. печ. л. 15,0. Тираж 1000 экз. Заказ № 634.

ООО «Дрофа». 127018, Москва, Сущевский вал, 49.

Предложения и замечания по содержанию и оформлению книги
просим направлять в редакцию общего образования издательства «Дрофа»:
127018, Москва, а/я 79. Тел.: (495) 795-05-41. E-mail: chief@drofa.ru

По вопросам приобретения продукции издательства «Дрофа»

обращаться по адресу: 127018, Москва, Сущевский вал, 49.

Тел.: (495) 795-05-50, 795-05-51. Факс: (495) 795-05-52.

Сайт ООО «Дрофа»: www.drofa.ru

Электронная почта: sales@drofa.ru

Тел.: 8-800-200-05-50 (звонок по России бесплатный)

Отпечатано способом ролевой струйной печати

в ОАО «Первая Образцовая типография»

Филиал «Чеховский Печатный Двор»

142300, Московская область, г. Чехов, ул. Полиграфистов, д. 1

Сайт: www.chpd.ru, E-mail: sales@chpk.ru, 8(495)988-63-87

ISBN 978-5-358-12647-3

© ООО «Дрофа», 2002

© ООО «Дрофа», 2010, с изменениями

Оглавление

ГЛАВА



Функции и графики

1. Понятие функции	8
2. Прямая, гипербола, парабола и окружность	15
3. Непрерывность и монотонность функций	23
4. Квадратичная и дробно-линейная функции. Преобразование графиков	33

ГЛАВА



Степени и корни

5. Степенная функция $y = x^n$ при натуральном n	42
6. Понятие корня n -й степени	48
7. Свойства арифметических корней	57
8. Степень с рациональным показателем	62



Показательная и логарифмическая функции

9. Функция $y = a^x$	71
10. Понятие логарифма	81
11. Свойства логарифмов	90



Тригонометрические функции и их свойства

12. Угол поворота	100
13. Радианная мера угла	104
14. Синус и косинус любого угла	108
15. Тангенс и котангенс любого угла	115
16. Простейшие тригонометрические уравнения	121
17. Формулы приведения	128
18. Свойства и график функции $y = \sin x$	136
19. Свойства и график функции $y = \cos x$	143
20. Свойства и графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$	148
21. Зависимости между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента	156
22. Синус и косинус суммы и разности двух углов	162
23. Тангенс суммы и тангенс разности двух углов	168
24. Тригонометрические функции двойного угла	171
25. Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму. Обратное преобразование	177
26. Решение тригонометрических уравнений	183

Повторение

27. Функции и графики	191
28. Уравнения и неравенства	206
Домашние контрольные работы	214
Ответы	220
Советы	245
Решения	256
Основные формулы	283
Предметный указатель	287

Этот учебник продолжает курс алгебры 7—9 классов. В течение следующих двух лет вы разовьете, обогатите и углубите свои математические знания. И, главное, научитесь их применять.

Вас ждет много интересных и разнообразных задач. В задачах, номера которых не имеют специальных обозначений, вы не должны испытывать никаких затруднений.

Значком «○» отмечены задания, в которых путь к ответу связан с некоторыми техническими сложностями.

Задачи, над которыми вам скорее всего придется подумать чуть больше, чем над другими, имеют обозначение «●». План решения таких задач полезно обсудить в классе с учителем.

Номера самых трудных задач имеют обозначение «*».

Значком «■» отмечены несколько задач, которые без калькулятора решать не стоит.

В конце учебника вы всегда сможете найти нужную при решении задач формулу.

Если задача не получается, ее решение или совет вы найдете в разделах «Советы» и «Решения». Решив задачу, сравните свой ответ с ответом в учебнике.

Кроме основного материала, знание которого можно считать обязательным, в учебнике помещен

и дополнительный материал, знакомство с которым безусловно будет полезно. Начало такого материала обозначается $\blacktriangledown$, а конец $\blacktriangle$.

Каждый пункт учебника завершается контрольными вопросами и заданиями, а каждая глава — домашними контрольными работами. Для домашней контрольной работы указывается примерное время, на которое рассчитано ее выполнение.

Каждая из домашних контрольных работ разбита на 3 уровня, которые можно трактовать как удовлетворительный, хороший и отличный. Так что вы сами сможете оценить свои математические достижения в этом учебном году.

Желаю успехов!

Автор



ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ

Вы уже знакомы с понятием функции из курса алгебры. Однако и в различных разделах математики, и в разных школьных учебниках определение функции дается по-разному. Мы будем использовать одно из самых простых определений этого важнейшего математического понятия. С этим определением, а также с некоторыми связанными с понятием функции обозначениями и математическими терминами вы познакомитесь в первом пункте главы. Во втором пункте вы встретитесь с некоторыми уже знакомыми вам функциями и графиками, в третьем речь пойдет о важных свойствах функций, часто применяемых при решении уравнений и неравенств, а в четвертом — об основных преобразованиях графиков.

1. Понятие функции

В окружающем нас мире многие величины взаимосвязаны, например, количество букв на странице этого учебника зависит от номера страницы, время разморозки в СВЧ-печи зависит, в основном, от массы продукта, а площадь квадрата — от длины его стороны. Во всех этих случаях каждому *допустимому* (возможному) значению второй из величин соответствует одно значение первой. Понятно, что в первом примере за номер страницы учебника можно взять любое натуральное число, не большее 288, во втором примере масса продукта ограничена рабочим объемом печи, а длина стороны квадрата из третьего примера, конечно, положительна.

Мы привели здесь простые примеры зависимостей между двумя величинами. Однако обычно все сложнее. Так, например, время разморозки зависит не только от массы продукта, но и от его формы и от мощности микроволнового излучения.

В математике обычно отвлекаются (абстрагируются) от физической природы величин и рассматривают зависимости между числовыми переменными.

Переменную y называют функцией переменной x , если каждому допустимому значению x соответствует единственное значение y .

Переменную x называют аргументом функции y .

Правило, по которому для каждого допустимого значения x находят соответствующее ему значение функции, обозначают какой-либо буквой. Так, например, чтобы указать, что значения y получают из значений x по правилу f , пишут:

$$y = f(x).$$

Множество допустимых значений аргумента называют областью определения функции и обозначают $D(f)$ или $D(y)$.

Множество, которое составляют все значения функции, называют областью значений функции и обозначают $E(f)$ или $E(y)$.

Пример 1. Найти область определения функции $y = \frac{4}{x}$ и вычислить значения функции при x равном: $2, \frac{3}{4}, -6$.

Решение. На аргумент x формула $y = \frac{4}{x}$ накладывает единственное ограничение: $x \neq 0$, поэтому областью определения данной функции является объединение двух числовых промежутков (интервалов): $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Значение функции, которое соответствует, например, $x = 2$ обозначают $y(2)$:

$$y(2) = \frac{4}{2} = 2, \quad y\left(\frac{3}{4}\right) = 4 : \frac{3}{4} = \frac{4 \cdot 4}{3} = \frac{16}{3}, \quad y(-6) = \frac{4}{-6} = -\frac{2}{3}.$$

О т в е т: $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; $y(2) = 2$, $y\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{16}{3}$, $y(-6) = -\frac{2}{3}$.

Примечание 1. В этом примере правило, по которому по значению аргумента находят значение функции, было представлено выражением $\frac{4}{x}$. Такой способ задания функции называют *аналитическим*. Этим способом задано большинство функций, которые встретятся вам на страницах этого учебника.

Множество значений аргумента, при которых имеет смысл выражение, задающее функцию, называют *естественной областью определения* функции. Другая ситуация с областью определения возникает, если, например, буквами x и y обозначить длины сторон в сантиметрах прямоугольника, имеющего площадь 4 см^2 . Тогда в силу положительности длин область определения функции $y = \frac{4}{x}$ представит собой числовой интервал $(0; +\infty)$.

Примечание 2. Знак « $\cup$ », который мы использовали для объединения промежутков, в математике объединяет любые множества, например: $\{1; 2; 3\} \cup \{3; 4\} = \{1; 2; 3; 4\}$.

Перевернув знак объединения, мы получим математический символ для *пересечения* множеств: $\{1; 2; 3\} \cap \{3; 4\} = \{3\}$. Если повернуть знак объединения « $\cup$ » на 90° , то получим знак, который показывает, что все элементы одного из множеств являются элементами другого, например: $\{1; 2; 3\} \subset \{1; 2; 3; 4\}$. Как говорят в таких случаях, первое множество является *подмножеством* второго, или второе множество *включает* в себя первое.

Пример 2. Функция $y = f(x)$ задана *графически* (рис. 1). Найти: а) $D(f)$; б) $f(-1)$; в) значения аргумента, при которых значение функции равно 2; г) нули функции; д) наибольшее и наименьшее значения функции.

Решение. а) Область определения этой функции — числовой промежуток $[-3; 6]$; б) $f(-1) = -0,7$; в) $f(x) = 2$ при $x = -2,9$, $x = 0,4$ и $x = 1,7$; г) нули функции, т. е. значения x , при которых $f(x) = 0$: $x = -2,3$, $x = -0,4$ и $x = 2,7$; д) наибольшее значение функции: $\max f(x) = f(1) = 4,5$, наименьшее значение функции: $\min f(x) = f(6) = -3$.

Пример 3. На рисунке 2 изображен график функции $x = f(y)$, аргументом которой является переменная y . Является ли это множество точек координатной плоскости графиком функции y ?

Решение. Чтобы некоторое множество точек координатной плоскости представляло собой график функции y , все

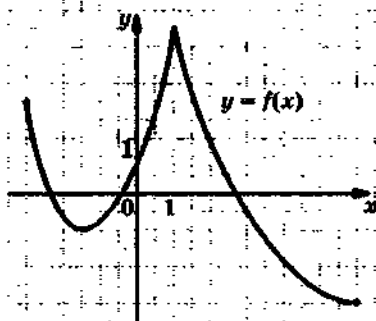


Рис. 1

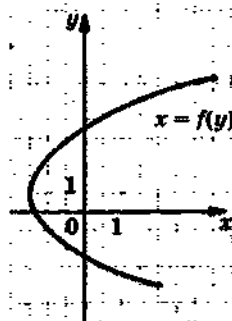


Рис. 2

эти точки должны иметь разные абсциссы — любая прямая, перпендикулярная оси абсцисс, или имеет единственную точку, или не имеет ни одной общей точки с графиком функции y . На рисунке мы видим, что, например, ось ординат (прямая $x = 0$) пересекает данную кривую в двух точках, значит, эта кривая не является графиком функции y .

Упражнения

1. Приведите свои примеры зависимостей между двумя величинами, и в каждом случае укажите множество допустимых значений второй из них.

2. Является ли y функцией x , если y — это площадь прямоугольника, а x его: а) сторона; б) диагональ; в) периметр; г) отношение длин сторон? Объясните свой ответ.

3. Является ли y функцией x , если y — это число десятых в десятичной записи x ? Является ли x функцией y ?

4°. Является ли y функцией x , если y — это двузначное число, а x — сумма его цифр? Является ли x функцией y ?

5°. В книге 300 страниц. Петя каждый день прочитывает по 50 страниц этой книги. Обозначив буквой y количество непрочитанных Петей страниц, а буквой x — число дней, когда Петя читает данную книгу: а) задайте аналитически функцию y ; б) укажите ее естественную и реальную области определения.

6. Дана функция: 1) $f(x) = 2x + 3$; 2) $f(x) = -4x + 5$;

3) $f(x) = x^2 + 3x + 4$; 4) $f(x) = x^2 + 7x - 4$.

Найдите: а) $f(3)$; б) значение x , при котором $f(x) = 4$.

7°. Правило f , задающее функцию $y = f(x)$, заключается в том, что для двузначного числа находят сумму его цифр. Найдите: а) $D(f)$; б) $f(17)$, $f(35)$, $f(59)$; в) при каких значениях x функция $f(x)$ принимает значение, равное 3; г) наибольшее и наименьшее значения функции; д)* какое значение функции соответствует наибольшему количеству значений аргумента.

8. По каждому из графиков функций, изображенных на рисунках 3—8, найдите: а) $D(f)$; б) $f(-2)$; в) при каком значении аргумента значение функции равно 3; г) нули функции; д) наибольшее и наименьшее значения функции.

9°. Подумайте и определите, существуют ли такие значения аргумента, при которых функции, заданные графиками: 1) на рисунках 3 и 5; 2) на рисунках 5 и 8 — принимают одни и те же значения. Найдите их.

10. Найдите область определения функции y :

1) $y = \frac{1}{x^2 - 4}$; 4) $y = \frac{1}{x^4 - 8x^2 - 9}$;

2) $y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$; 5) $y = \frac{1}{x - |x|}$;

3) $y = \frac{1}{x^4 - 5x^2 + 4}$; 6) $y = \frac{1}{x + |x|}$.

11. Найдите область определения функции y :

1) а) $y = \sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x+2}$; г) $y = \sqrt{(x+2)(x-2)}$;

б) $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{x+2}$; д) $y = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}-3}$.

в) $y = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}$;

2) а) $y = \sqrt{x+5} \cdot \sqrt{x+3}$; г) $y = \sqrt{(x+5)(3-x)}$;

б) $y = \sqrt{x+5} + \sqrt{x+3}$; д) $y = \frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{x+3}-2}$.

в) $y = \frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{x+3}}$;

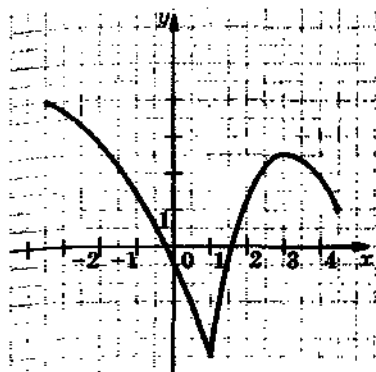


Рис. 3

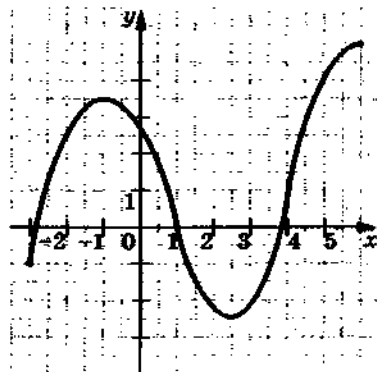


Рис. 6

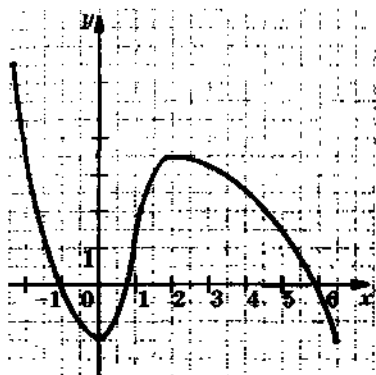


Рис. 4

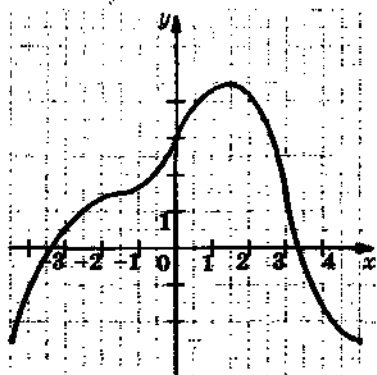


Рис. 7

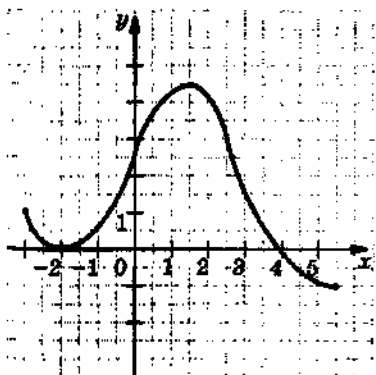


Рис. 5

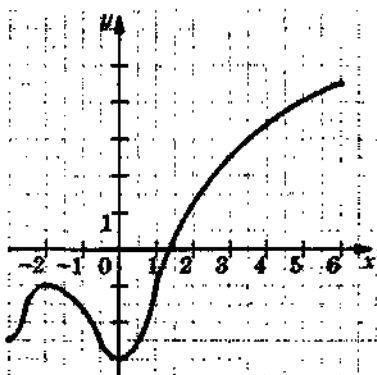


Рис. 8

12°. Из квадрата со стороной 10 см вырезаны квадратики со стороной x см, и из полученной фигуры сделана открытая коробка (рис. 9). Выразите объем V (см³) этой коробки через x . Укажите область определения функции $y = V(x)$.

13°. В прямоугольный треугольник с катетами 8 см и 4 см вписан прямоугольник (рис. 10). Обозначив буквой x (см) длину его стороны, параллельной меньшему катету, выразите периметр P (см) прямоугольника. Укажите область определения и область значений функции $y = P(x)$.

14°. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке: 1) $[0; 1]$; 2) $[-1; 0]$; 3) $[-1; 2]$; 4) $[1; 2]$. Найдите область определения следующих функций:

- а) $y = f(-x)$; г) $y = f(x^2)$; е) $y = f(x + |x|)$;
 б) $y = f(2x)$; д) $y = f(x + |x|)$; ж) $y = f\left(\frac{x - |x|}{x}\right)$.
 в) $y = f(x - 1)$;

15°. В математике за некоторыми числовыми множествами закреплены стандартные обозначения: N — множество натуральных чисел, Z — множество целых чисел, Q — множество рациональных чисел, R — множество действительных чисел, R_+ — множество неотрицательных действительных чисел.

Вставьте вместо многоточия один из знаков « $\cap$ », « $\cup$ », « $\subset$ » так, чтобы получилось верное утверждение:

- а) $N \dots Q$; б) $N \dots R_+$; в) $N \dots Z = N$; г) $R_+ \dots Z = N$.

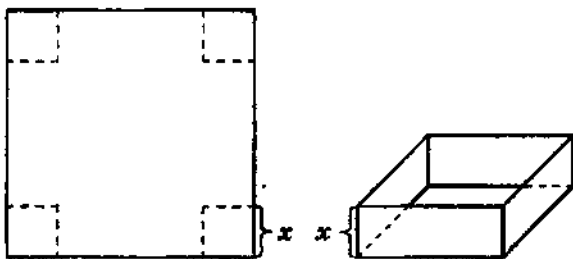


Рис. 9

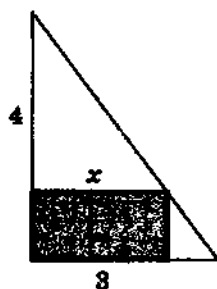


Рис. 10

Контрольные вопросы и задания

1. В каких случаях одна переменная является функцией другой?
2. Что такое естественная область определения функции?
3. Приведите пример функции, нуль которой больше, чем $f(0)$.

4. Найдите $D(y)$ и $y(3)$, если $y = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$.

2. Прямая, гипербола, парабола и окружность

С линиями, названия которых приведены в заглавии этого пункта, вы не раз встречались. В нашем курсе им также отводится важная роль. Следующие три рисунка напомнят вам о линейной функции.

Прямая на рисунке 11 представляет собой график линейной функции $y = kx + l$ при $k > 0, l > 0$, на рисунке 12 — при $k < 0, l > 0$, а линейная функция, график которой вы видите на рисунке 13, задается формулой $y = l$, в которой, вообще, как бы нет аргумента. На самом деле ее угловой коэффициент k равен нулю: $y = 0 \cdot x + l$. Такая функция при всех значениях аргумента принимает одно и то же значение, поэтому ее называют *константой* (или *постоянной*).

Пример 1. Задать функцию, график которой параллелен прямой $y = 2x + 3$ и проходит через точку $(-5; 2)$.

Решение. Искомое уравнение имеет вид $y = kx + l$. Угловые коэффициенты параллельных прямых равны, т. е.

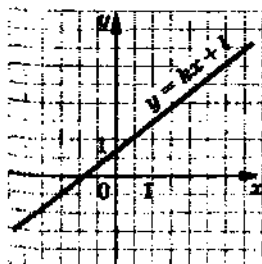


Рис. 11

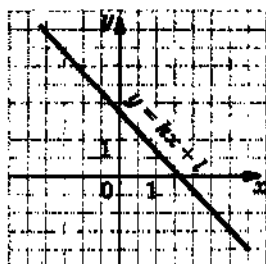


Рис. 12

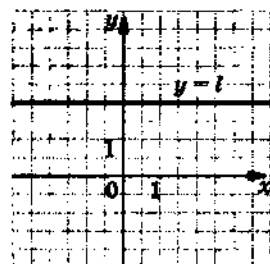


Рис. 13

$k = 2$. Остается найти начальную ординату l . Поскольку координаты данной точки должны удовлетворять искомому уравнению, получим:

$$2 = 2 \cdot (-5) + l, l = 2 + 10 = 12.$$

Окончательно имеем: $y = 2x + 12$.

О т в е т: $y = 2x + 12$.

▼ П р и м е р 2. Задать линейную функцию, график которой проходит через точки $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$.

Р е ш е н и е. Любая линейная функция задается уравнением $y = kx + l$. Подстановка в это уравнение координат первой точки приводит к уравнению общего вида прямых, проходящих через точку $(x_1; y_1)$:
$$\begin{cases} y = kx + l, \\ y_1 = kx_1 + l, \end{cases} \quad y - y_1 = k(x - x_1).$$

Для определения k подставим в это уравнение координаты второй из данных точек: $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$,

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Имеем: $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$. Группируя игреки и иксы в

разных частях уравнения, получим:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Так и записывают обычно уравнение прямой, проходящей через две данные точки.

П р и м е ч а н и е. Мы пришли к равенству двух дробей, знаменатели которых должны отличаться от нуля. Однако никто не запрещает двум данным точкам иметь, например, равные ординаты: $y_2 = y_1$. В этом случае график линейной функции оказывается параллелен оси абсцисс и следует сразу написать искомое уравнение: $y = y_1$.

Если у данных точек совпадут абсциссы: $x_2 = x_1$, то уравнение соответствующей прямой $x = x_1$ не будет задавать функцию y (одному значению x в этом случае соответствует более одного значения y). Δ

На рисунке 14, а и б изображены графики функции $y = \frac{k}{x}$ при $k > 0$ и при $k < 0$ — гиперболы, каждая из которых состоит из пары симметричных относительно начала координат ветвей.

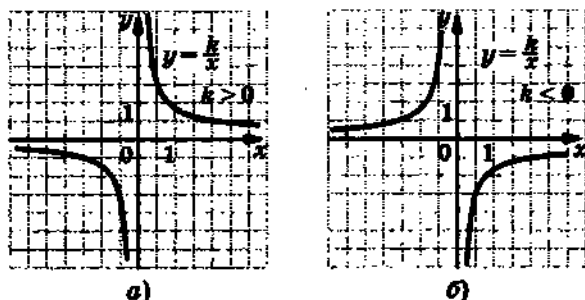


Рис. 14

Функция $y = \frac{k}{x}$ определена на множестве всех действительных чисел, кроме 0, т. е. на объединении промежутков: $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Это же множество является и областью значений функции y .

Гипербола $y = \frac{k}{x}$ имеет две оси симметрии: прямые $y = x$ и $y = -x$.

Обратим внимание на важное свойство гиперболы $y = \frac{k}{x}$. При движении по графику от оси ординат расстояние от точек графика до оси абсцисс уменьшается, и график как бы сливается с осью абсцисс. Говорят, что y *стремится к нулю*, когда x *стремится к бесконечности*.

Аналогично, когда x *стремится к 0*, y *стремится к бесконечности* или к *минус бесконечности* (в зависимости от того, с какой стороны точка приближается к оси ординат).

Ось абсцисс и ось ординат называют соответственно горизонтальной и вертикальной *асимптотами* графика функции $y = \frac{k}{x}$.

На рисунке 15 изображена парабола — график еще одной хорошо вам известной функции $y = x^2$. Ветви ее направлены вверх, а вершина расположена в начале координат. Функция $y = x^2$ определена на множестве всех действительных чисел, а областью ее значений является множество неотрицательных чисел.

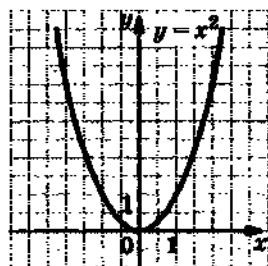


Рис. 15

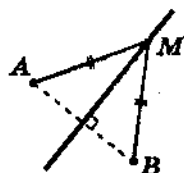


Рис. 16

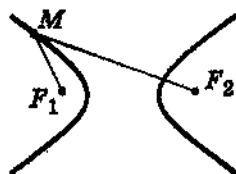


Рис. 17

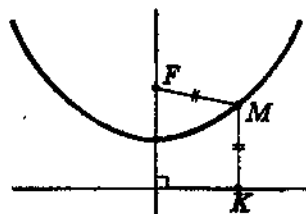


Рис. 18

Прямую, гиперболу и параболу можно рассматривать, как некоторые геометрические места¹ точек плоскости.

Прямая — геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных точек (рис. 16).

Гипербола — геометрическое место точек, разность расстояний от каждой из которых до двух данных точек равна данному числу (рис. 17).

Парабола — геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки и данной прямой (рис. 18).

Во всех трех описаниях геометрических мест используется понятие расстояния. Полезно уметь выражать расстояние между двумя точками координатной плоскости через координаты этих точек.

Применяя теорему Пифагора к прямоугольному треугольнику ABC (рис. 19), получим:

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Пример 8. Записать уравнение окружности с центром в точке $K(3; 4)$, касающейся оси абсцисс.

Решение. Изобразим данную окружность (рис. 20). Радиус окружности равен 4, значит, расстояние от произвольной ее точки $M(x; y)$ до точки $K(3; 4)$ — центра окружности равно 4: $\sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2} = 4$ или после освобождения от корня: $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 16$.

Ответ: $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 16$.

Примечание. Окружность не является графиком функции, поскольку не выполняется требование однозначности выражения y че-

¹ Геометрическим местом точек называют множество точек плоскости, для каждой из которых выполняется некоторое условие.

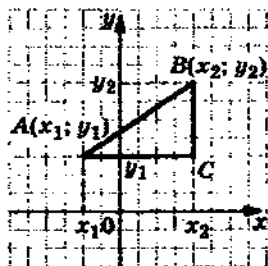


Рис. 19

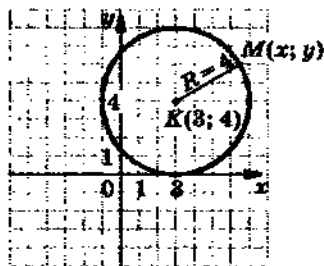


Рис. 20

рез x , например, прямая $x = 0$ пересекает данную окружность в двух точках, ординаты которых — корни уравнения $(0 - 3)^2 + (y - 4)^2 = 16$.

Упражнения

16. 1) Постройте график функции $y = -\frac{6}{7}x + 3$. Найдите по графику:

а) координаты точек пересечения этого графика с осями координат;

б) значение функции при $x = -3,5; 10,5$;

в) значение аргумента, которому соответствует $y = 1; 12$.

• Есть ли на графике точки, обе координаты которых — целые числа? Если есть, то сколько таких точек?

2) Постройте график функции $y = \frac{3}{4}x - 1$. Найдите по графику:

а) координаты точек пересечения этого графика с осями координат;

б) значение функции при $x = -4; -6; 2; 8$;

в) значение аргумента, которому соответствует $y = 1; 2; 5$.

• Есть ли на графике точки, обе координаты которых — натуральные числа? Если есть, то сколько таких точек?

17°. Найдите k и l , если известно, что прямая $y = kx + l$:

1) параллельна прямой $y = 0,3x$ и проходит через точку:
а) $A(0; 7)$; б) $B(0; 8)$; в) $C(2; 5)$; г) $D(-5; 6)$;

2) параллельна прямой $y = 0,75x + 11$ и проходит через точку: а) $K(8; 1)$; б) $M(4; 9)$;

3) параллельна прямой $y = -\frac{3}{7}x - 6$ и проходит через точку:
а) $P(7; 4)$; б) $E(3; 0)$.

18°. Каково примерное расположение графика функции $y = kx + l$, если:

- | | | |
|---------------------|---------------------|---------------------|
| 1) $k > 0, l > 0$; | 4) $k < 0, l < 0$; | 7) $k = 0, l > 0$; |
| 2) $k < 0, l > 0$; | 5) $k > 0, l = 0$; | 8) $k = 0, l < 0$; |
| 3) $k > 0, l < 0$; | 6) $k < 0, l = 0$; | 9) $k = 0, l = 0$? |

19°. Опишите примерное расположение прямой $y = kx + l$ и определите знаки k и l , если график расположен: а) в I, II и III; б) в I, II и IV; в) в I, III и IV; г) во II, III и IV координатных четвертях.

20°. Может ли график линейной функции $y = kx + l$ располагаться только:

- 1) в I и II координатных четвертях;
- 2) во II и IV координатных четвертях;
- 3) в III и IV координатных четвертях;
- 4) в I и III координатных четвертях;
- 5) в I и IV координатных четвертях;
- 6) во II и III координатных четвертях?

21°. Задайте аналитически линейную функцию, график которой проходит через точки:

- 1) $A(-1; 2)$ и $B(1; -1)$;
- 2) $A(-3; -5)$ и $B(2; 4)$;
- 3) $A(-5; 13,5)$ и $B(17; 13,5)$.

22°. 1) Не выполняя построения графика функции $y = \frac{3}{4}x + 9$, определите:

- а) координаты точек его пересечения с осями координат;
- б) принадлежат ли графику точки $A(100; 84)$, $B(-0,05; -7,9)$, $C(-30; 30,5)$.

° Есть ли на графике точка, абсцисса которой равна ее ординате?

2) Не выполняя построения графика функции $y = -\frac{2}{5}x - 8$, определите:

- а) координаты точек его пересечения с осями координат;
- б) принадлежат ли графику точки $A(50; 12)$, $B(-0,05; -7,98)$, $C(52; 28)$.

• Есть ли на графике точка, абсцисса и ордината которой — противоположные числа?

23°. 1) Прямая $y = 3x + l$ проходит через точку $A(17; 30)$. Найдите l и определите, проходит ли эта прямая через точку $B(25; 54)$.

2) Прямая $y = -2,5x + l$ проходит через точку $M(-20; 66)$. Найдите l и определите, проходит ли эта прямая через точку $C(20; 86)$.

24°. Заполняя таблицы значений обратно пропорциональных переменных, ученик допустил в нижних строках по одной ошибке. Исправьте их.

4	7,5	50
1,55	0,8	0,12

0,5	0,25	0,125
16	35	70

25°. Задайте формулой зависимость между переменными z и x . Являются ли переменные z и x : а) пропорциональными; б) обратно пропорциональными, если:

1) переменные x и y обратно пропорциональны, а переменные y и z пропорциональны, причем $y = \frac{6}{x}$ и $z = 0,5y$;

2) переменные x и y пропорциональны, а переменные y и z обратно пропорциональны, причем $y = 2,5x$ и $z = \frac{5}{y}$?

26. Найдите число k , если известно, что график функции $y = \frac{k}{x}$ проходит через точку:

1) $M(10; 0,4)$; 2) $E(-1,2; 15)$.

27°. График функции $y = \frac{k}{x}$ проходит через точку $A(16; 2,5)$. Проходит ли он через точку: 1) $P(-8; -5)$; 2) $M(12,5; 3,2)$?

28°. Точка $C(a; b)$ принадлежит графику функции: 1) $y = kx$; 2) $y = \frac{k}{x}$. Принадлежит ли этому графику точка: а) $A(-a; -b)$; б) $B(2a; \frac{1}{2}b)$; в) $C(0,1a; 10b)$; г) $M(3a; 3b)$; д) $P(b; a)$?

29. Постройте в одной системе координат графики функций:

1) $y = x$ и $y = \frac{1}{x}$; 4) $y = 0,5x + 1$ и $y = x^2$;

2) $y = -2x$ и $y = \frac{-2}{x}$; 5) $y = \frac{1}{x}$ и $y = x^2$;

3) $y = 2x - 2$ и $y = \frac{4}{x}$; 6) $y = \frac{-4}{x}$ и $y = x^2$.

Укажите координаты точек пересечения графиков.

30. Имеет ли асимптоты график функции:

1) $y = \frac{3}{2|x|}$; 2) $y = \frac{1}{x^2}$?

31*. Сколько общих точек могут иметь графики: 1) линейной функции и функции $y = \frac{k}{x}$; 2) параболы $y = x^2$ и гиперболы $y = \frac{k}{x}$? Ответы подтвердите схематическими рисунками.

32*. Могут ли быть равными суммы координат точек пересечения прямой с ветвью гиперболы $y = \frac{1}{x}$, расположенной в I четверти? Какой угловой коэффициент должна иметь такая прямая?

33*. Чем отличаются функции $y = kx$ и $y = \frac{k}{x}$ при $k = 0$?

34*. На рисунке 21 изображено несколько случаев взаимного расположения на координатной прямой точек $A(x)$, $B(x^2)$ и $C(\frac{1}{x})$. При этом допущено несколько ошибок.

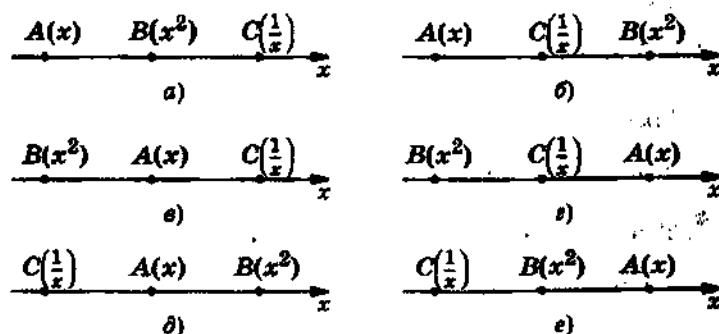


Рис. 21

В случаях, когда указанное взаимное расположение точек A , B и C возможно, укажите, где примерно расположены точки $O(0)$ и $E(1)$.

35°. Задайте аналитически функцию, график которой представляет собой множество точек координатной плоскости, равноудаленных от точек:

1) $A(-1; 2)$ и $B(1; -2)$; 3) $A(13,5; -2)$ и $B(13,5; 5)$.

2) $A(-3; -5)$ и $B(1; 3)$;

36°. Задайте аналитически функцию, график которой представляет собой множество точек координатной плоскости, равноудаленных от прямой $y = -1$ и от точки $K(0; 1)$.

37°. Запишите уравнение окружности с центром в точке $K(2; -3)$, касающейся:

1) оси абсцисс;

2) оси ординат.

38°. Запишите уравнение окружности с радиусом, равным 5, центр которой расположен:

1) в точке $K(4; 4)$;

3) на прямой $y = -x$.

2) на прямой $y = x$;

Контрольные вопросы и задания

1. Все ли уравнения прямых, проходящих через точку $A(2; 1)$, можно записать в виде

$$y - 1 = k(x - 2)?$$

2. Найдите координаты точек пересечения прямой $y = 12x - 11$ и параболы $y = x^2$.

3. Запишите уравнение, задающее геометрическое место точек, равноудаленных от точек $A(2; 0)$ и $B(5; 3)$.

3. Непрерывность и монотонность функций

Графики линейной функции и функции $y = x^2$ представляют собой сплошные непрерывные линии, которые можно изобразить, не отрывая карандаш от бумаги. Поэтому и сами эти функции называют *непрерывными*.

В отличие от них, график функции $y = \frac{k}{x}$ состоит из двух изолированных непрерывных ветвей. Говорят, что функция $y = \frac{k}{x}$ непрерывна на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$, а при $x = 0$ имеет разрыв.

Пример 1. Является ли непрерывной функция

$$y = \begin{cases} x^2, & \text{при } x > 1, \\ 3 - x, & \text{при } x < 1? \end{cases}$$

Решение. Данная функция на разных промежутках задается разными выражениями. Такие функции называют *кусочно-заданными*.

Понятно, что на промежутке $(1; +\infty)$ данная функция не имеет точек разрыва. Непрерывна она и на промежутке $(-\infty; 1)$.

Значит, остается выяснить, как выглядит ее график в непосредственной близости от точки с абсциссой 1, как говорят, *в окрестности точки 1*.

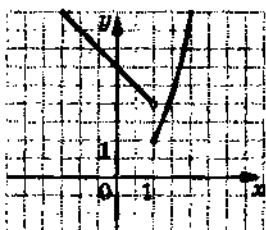


Рис. 22

График данной функции (рис. 22) состоит из части прямой $y = 3 - x$ и части параболы $y = x^2$. Когда абсциссы точек левой части графика приближаются к 1, их ординаты приближаются к числу 2.

Правая же ветвь графика начинается в точке $(1; 1)$. При переходе от левой ветви графика к правой придется оторвать карандаш от бумаги. Значит, функция

$$y = \begin{cases} x^2, & \text{при } x > 1, \\ 3 - x, & \text{при } x < 1 \end{cases}$$

имеет разрыв в точке $x = 1$.

Примечание 1. Мы связали понятие непрерывности функции с возможностью изобразить ее график, не отрывая карандаш от бумаги. В большинстве случаев такое представление вполне достаточно для решения задач. С более строгим определением вы встретитесь в курсе 11 класса.

Примечание 2. Все функции, заданные аналитически (формулами), с которыми вы встречались в курсе математики: $y = P(x)$, $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$, $y = \sqrt{P(x)}$ и т. п., где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, непрерывны на любом промежутке, входящем в область их определения.

Познакомимся с двумя функциями, имеющими бесконечное множество точек разрыва. Уже в 5 классе, при записи неправильных дробей в виде смешанных чисел вы встретились с понятиями целой и дробной частей числа. Например, $\frac{14}{3} = 4 + \frac{2}{3}$. Здесь 4 — целая часть, а $\frac{2}{3}$ — дробная часть числа $\frac{14}{3}$.

Целой частью числа x называется наибольшее целое число, не превосходящее x .

Для обозначения целой части используются квадратные скобки: $[x]$ — целая часть числа x . Дробную часть $\{x\}$ можно определить через само число x и его целую часть $[x]$: $\{x\} = x - [x]$.

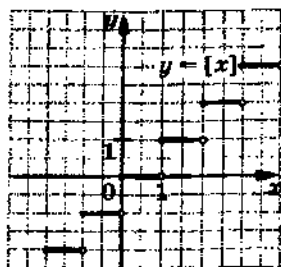
Примечание. Из определения целой и дробной части следует, что:

1) целая часть целого числа равна самому числу. В этом случае дробная часть оказывается равной нулю;

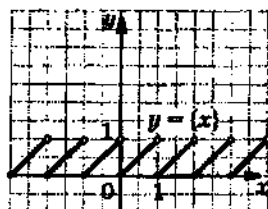
2) целая часть отрицательного смешанного числа, например, $-3,76$ равна -4 , а его дробная часть равна $0,24$;

3) дробная часть числа не обязательно является дробным числом. Мы уже видели, что она может оказаться равной целому числу 0, дробная часть может представлять собой и иррациональное число: $\{\sqrt{2}\} = \sqrt{2} - 1$.

Рассмотрим функции $y = [x]$ и $y = \{x\}$. Обе они определены на множестве R всех действительных чисел. Значением первой из них может быть любое целое число, а значения второй функции заполняют промежуток $[0; 1)$. Построив графики этих функций (рис. 23), мы видим, что все целые числа являются их точками разрыва.



а)



б)

Рис. 23

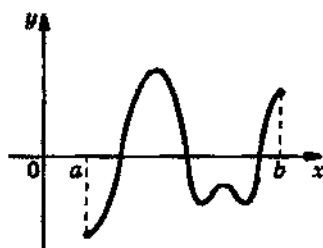


Рис. 24

С непрерывностью функций связано полезное при решении различных задач утверждение, которое носит название *теоремы о промежуточном значении*.

Если непрерывная на отрезке функция принимает на его концах значения разных знаков, то по крайней мере в одной точке этого отрезка она обращается в нуль.

Это утверждение становится совершенно очевидным, если обратиться к графической интерпретации: непрерывная линия, соединяющая точки верхней и нижней координатных полуплоскостей, пересекает ось абсцисс (рис. 24).

Заметим, что если непрерывная на промежутке функция не обращается в нуль ни в одной его точке, то на этом промежутке она сохраняет знак. Таким образом, *перемена знака любой функции может происходить только при переходе ее через нуль, или точку разрыва*. На этом свойстве функций основан прием решения неравенств, называемый *методом интервалов*.

Пример 2. Решить неравенство $\frac{10x^2 + 16x - 26}{3x^2 - 5x + 2} > 0$.

Решение. Найдем промежутки, на которых функция $y = \frac{10x^2 + 16x - 26}{3x^2 - 5x + 2}$ сохраняет знак. В данном случае границами ее промежутков *знакопостоянства* являются нули числителя и знаменателя дроби $\frac{10x^2 + 16x - 26}{3x^2 - 5x + 2}$.

Нули числителя: 1 и -2,6, нули знаменателя: 1 и $\frac{2}{3}$. Таким образом, точки разрыва функции y — точки 1 и $\frac{2}{3}$, а ее нуль — точка -2,6.

Эти точки разбивают координатную прямую на четыре интервала (рис. 25, а), на каждом из которых функция y сохраняет знак.

Остается эти знаки определить. Для этого можно вычислить значение функции в какой-нибудь точке каждого интервала. Но можно использовать и другие соображения. Так, напри-

мер, зная, что каждый из квадратных трехчленов, стоящих в числителе и знаменателе дроби, справа от своего большего корня принимает положительные значения, можно определить знак функции на самом правом интервале (рис. 25, б).

Каждый из данных квадратных трехчленов меняет знак при переходе через свой корень. Значит, при переходе через их общий корень 1 знак изменят и числитель, и знаменатель дроби, а сама дробь при этом свой знак сохранит (рис. 25, в). При пере-

ходе через точку $\frac{2}{3}$ знак изменит только знаменатель, а при переходе через точку $-2,6$ изменит знак только числитель. Каждый из этих переходов приведет к изменению знака всей дроби, что можно показать с помощью *кривой знаков* (рис. 25, г).

О т в е т: $(-\infty; -2,6) \cup (\frac{2}{3}; 1) \cup (1; +\infty)$.

П р и м е ч а н и е. Ответ можно записать с помощью простейших неравенств:

$$x < -2,6, \quad \frac{2}{3} < x < 1, \quad x > 1.$$

Теорема о промежуточном значении позволяет установить, что на некотором промежутке имеется нуль функции $y = f(x)$, но из нее не следует, что этот нуль единственный. А такая информация была бы очень полезна, например, при решении уравнений, когда нужно найти все корни уравнения $f(x) = 0$. Здесь на помощь приходят другие свойства, которыми обладают некоторые функции.

Рассмотрим линейную функцию $y = kx + l$ при $k > 0$ (рис. 11). Легко видеть, что с увеличением значения аргумента увеличивается (возрастает) и значение функции. То же самое можно сказать иначе: для любых двух значений x_1 и x_2 из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$. Функции, обладающие таким свойством, называют *возрастающими*.

При $k < 0$ (рис. 12) с увеличением значения аргумента значение линейной функции уменьшается (убывает). Такие функции называют *убывающими*.

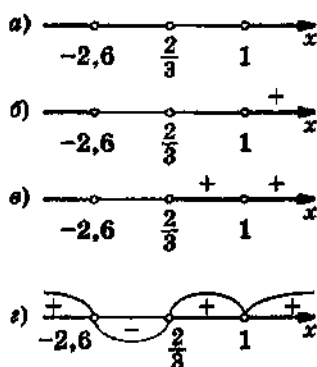


Рис. 25

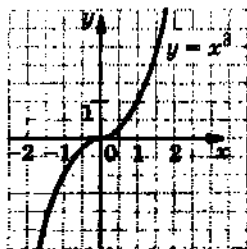


Рис. 26

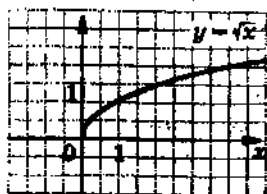


Рис. 27

Конечно, не только линейные функции являются возрастающими или убывающими. Так, например, известная вам функция $y = x^3$, графиком которой является кубическая парабола (рис. 26), является возрастающей, она возрастает на всей своей области определения. На всей своей области определения возрастает и функция $y = \sqrt{x}$ (рис. 27).

Часто, однако, встречаются функции, которые на одних промежутках возрастают, а на других убывают. Так, например, функция $y = x^2$ (рис. 15) на промежутке $(-\infty; 0]$ убывает, а на промежутке $[0; +\infty)$ возрастает.

Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей на некотором промежутке*, если для любых двух значений x_1 и x_2 из этого промежутка из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

Функция $y = f(x)$ называется *убывающей на некотором промежутке*, если для любых двух значений x_1 и x_2 из этого промежутка из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

Возрастающие и убывающие функции называют *монотонными*, а промежутки возрастания и убывания называют *промежутками монотонности*.

Вернемся к вопросу о единственности корня. Пусть некоторая непрерывная функция $y = f(x)$ монотонна на отрезке $[a; b]$ и принимает в его концах значения разных знаков. Тогда на этом отрезке она имеет единственный нуль, т. е. уравнение $f(x) = 0$ имеет единственный корень на отрезке $[a; b]$.

Пример 3. Решить уравнение $\sqrt{x^3} + x - 12 = 0$.

Решение. Непрерывная функция $y = \sqrt{x^3} + x - 12$ является возрастающей (при увеличении x увеличиваются значе-

ния каждого из выражений: x^3 , $\sqrt{x^3}$, $\sqrt{x^3} + x$ и $\sqrt{x^3} + x - 12$). При этом $y(0) < 0$, а $y(9) > 0$. Значит, единственный корень данного уравнения принадлежит отрезку $[0; 9]$. В данном случае его легко подобрать:

$$\sqrt{4^3} + 4 - 12 = 2^3 + 4 - 12 = 0.$$

Ответ. 4.

Примечание. Монотонная функция каждое свое значение принимает только один раз (т. е. при одном значении аргумента). Значит, уравнение $f(x) = a$, где a некоторое число, а $f(x)$ монотонная функция, либо не имеет корней, либо имеет единственный корень.

Упражнения

39. Найдите промежутки, на которых непрерывна функция:

$$1) y = \frac{1}{5x+7}; \quad 3) y = \frac{x^2}{x^2+4x+4};$$

$$2) y = \frac{1}{x^2-9}; \quad 4) y = \frac{2x-3}{3x^2-7x+4}.$$

40°. Найдите точки разрыва функции:

$$1) y = \frac{|x-5|}{x^3-8x^2+15x}; \quad 2) y = \frac{|x+5|}{x^3+9x^2+14x}.$$

41. Постройте график кусочно-заданной функции:

$$1) y = \begin{cases} x & \text{при } x < 0, \\ x^2 & \text{при } x \geq 0; \end{cases} \quad 4) y = \begin{cases} 2x-1 & \text{при } x \geq 1, \\ \frac{1}{x} & \text{при } 0 < x < 1; \end{cases}$$

$$2) y = \begin{cases} x & \text{при } x \geq 0, \\ x^2 & \text{при } x < 0; \end{cases} \quad 5)^\circ y = \begin{cases} x+2 & \text{при } x < -1, \\ x^2 & \text{при } -1 \leq x < 2, \\ 5-x & \text{при } x \geq 2; \end{cases}$$

$$3) y = \begin{cases} 3x-1 & \text{при } x < 1, \\ x^2 & \text{при } x \geq 1; \end{cases} \quad 6)^\circ y = \begin{cases} \frac{2}{x} & \text{при } x < -2, \\ x-1 & \text{при } -2 < x < 1, \\ 5-x & \text{при } x \geq 1. \end{cases}$$

Имеет ли эта функция разрыв? В каких точках?

42[○]. Приведите пример функции непрерывной: 1) при всех значениях x ; 2) при всех значениях x , кроме $x = 2$; 3) при всех значениях x , кроме $x = 2$; 5 и 9.

4)[●] В заданиях 2) и 3) приведите примеры функций, определенных в точках разрыва.

5)* В задании 3) приведите пример функции, неопределенной в точках разрыва и имеющей единственную вертикальную асимптоту.

43. Докажите, что уравнение $3x^3 - 4x^2 + 2x - 1 = 0$ на промежутке $[0; 2]$ имеет корень.

44. Решите неравенства:

1) $x(x-1)(x+8) > 0$; 4) $(5y-6)(3y+5)(y-3)(y+1) < 0$;

2) $\frac{x+3}{x(x-7)} < 0$; 5)[○] $\frac{(x-1)(2x+5)}{7-6x-x^2} < 0$;

3) $\frac{(y+3)(3y-2)}{y(y-7)} > 0$; 6)[○] $x(3x^2+x-2)(3x-2) < 0$.

45. Решите неравенства:

1) $\frac{t-1}{3t+2} + \frac{2-t}{3t+1} < 0$; 3) $\frac{3x-1}{x-1} - \frac{2x+1}{x+1} < 1$;

2) $\frac{2z+1}{z+3} + \frac{6z-1}{5-3z} > 0$; 4) $\frac{2x+1}{x+2} + \frac{1-5x}{x-3} > -3$.

46[○]. Найдите область определения функции:

1) $y = \sqrt{\frac{2-x}{x^2-4}}$; 2) $y = \sqrt{(x+2)(x^2-4)}$.

47. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 3—8, с. 13). Запишите промежутки возрастания и убывания этой функции.

48[●]. а) Докажите, что если возрастающие функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ определены на промежутке L , то их сумма $y = f(x) + g(x)$ на этом промежутке возрастает.

6) Можно ли утверждать, что функция, являющаяся суммой двух убывающих функций, определенных на одном промежутке, является убывающей?

49⁰. Какие из следующих функций являются возрастающими, убывающими?

- 1) $y = 2x + 1$; 4) $y = x^3 + x$; 6) $y = x(3 + x)$;
2) $y = 5 - 0,5x$; 5) $y = x^3 + \sqrt{x}$; 7) $y = x^2 \sqrt{x + 2}$.
3) $y = x^2 + 1$;

50⁰. Докажите, что если $y = f(x)$ — возрастающая функция, то функция $y = -f(x)$ — функция убывающая.

51⁰. Докажите, что если возрастающая функция $y = f(x)$ принимает на промежутке L только положительные значения, то функция $y = \frac{1}{f(x)}$ на этом промежутке убывает.

52⁰. Докажите утверждение: «Если $f(a) < g(a)$ и $f(b) > g(b)$, где функция $y = f(x)$ непрерывна и возрастает на $[a; b]$, а функция $y = g(x)$ на этом промежутке непрерывна и убывает, то уравнение $f(x) = g(x)$ имеет на $(a; b)$ единственный корень».

53⁰. Докажите, что уравнение $f(x) = g(x)$, где $y = f(x)$ возрастающая, а $y = g(x)$ убывающая функции, либо не имеет корней, либо имеет единственный корень.

54⁰. Решите уравнение:

- 1) $\sqrt{x} + \sqrt{x + 5} = 5$; 2) $\sqrt{x + 6} + \sqrt{x - 1} = 7$.

55⁰. Решите с помощью доказанного в № 53 утверждения уравнения:

- 1) $\sqrt{x - 3} + \sqrt{x + 2} = 19 - 2x$; 2) $\sqrt{x - 9} + \sqrt{x} = 14 - \frac{x}{5}$.

56⁰. Докажите, что уравнение $3x^3 + 2x - \frac{1}{x} = 0$ на промежутке $[0,5; 2]$ имеет единственный корень.

57^О. Изобразите график какой-нибудь непрерывной функции, зная, что:

- 1) а) функция определена на промежутке $[-3; 4]$;
б) значения функции составляют промежуток $[-8; 3]$;
в) функция возрастает на промежутке $[-3; 0]$, а убывает на промежутке $[0; 4]$;
г) нули функции: -1 и 2 ;
- 2) а) область определения функции есть промежуток $[-4; 3]$;
б) значения функции составляют промежуток $[-1; 4]$;
в) функция возрастает на промежутке $[-1; 1]$, а убывает на промежутках $[-4; -1]$ и $[1; 3]$;
г) нули функции: -1 и 2 ;
- 3) а) область определения функции промежуток $[-4; 3]$;
б) значения функции составляют промежуток $[-5; 3]$;
в) функция убывает на промежутках $[-4; 1]$ и $[2; 3]$, а возрастает на промежутке $[1; 2]$;
г) нули функции: -2 и 2 ;
- 4) а) функция определена на промежутке $[-5; 2]$;
б) значения функции составляют промежуток $[-2; 5]$;
в) функция убывает на промежутке $[-3; -1]$, а возрастает на промежутках $[-5; -3]$ и $[-1; 2]$;
г) нули функции: -4 и -1 .

58*. Найдите все значения k такие, что уравнение:

- 1) $kx - 1 = [x]$; 2) $kx - 1 = \{x\}$ имеет ровно: а) два положительных корня; б) два отрицательных корня; в) два корня.

Контрольные вопросы и задания

1. Изобразите график какой-нибудь функции, определенной на отрезке $[-3; 4]$, так, чтобы на промежутках $[-3; 1]$ и $[1; 4]$ она была непрерывной, а в точке $x = 1$ имела разрыв.

2. Какой смысл имеют «пустой» и черный кружки на графике функции, изображенном на рисунке 22 (с. 24)? Как следует изменить задание этой функции, чтобы кружки поменялись местами?

3. Изобразите график какой-нибудь функции $y = f(x)$, непрерывной на отрезке $[1; 4]$, так, чтобы одновременно выполнялись условия: а) $x = 3$ — нуль функции; б) функция убывает на отрезке $[1; 2]$ и возрастает на отрезке $[2; 4]$.

Сколько корней имеет уравнение $f(x) = 0$ на отрезке $[1; 4]$? В какой точке функция принимает свое наименьшее значение?

4. Квадратичная и дробно-линейная функции. Преобразование графиков

Умение строить графики функций, рассмотренных в предыдущем пункте, часто помогает в построении более сложных графиков. Наиболее яркий из знакомых вам примеров преобразования графиков — получение графика квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ из графика функции $y = x^2$. Вспомним это преобразование.

1. Если a положительно, то при переходе от графика $y = x^2$ к графику $y = ax^2$ первый график как бы растягивается от оси абсцисс в a раз. На рисунке 28 показаны графики функций $y = ax^2$ при некоторых значениях a .

Примечание. На русском языке странно звучит «растянуть в 0,5 раза». Естественнее в таких случаях говорить: «сжать в 2 раза». Это, правда, мало поможет, когда a будет равно, например, $\frac{2}{3}$.

Если a отрицательно, то сначала нужно перейти от графика $y = x^2$ к графику $y = -x^2$, симметричному относительно оси

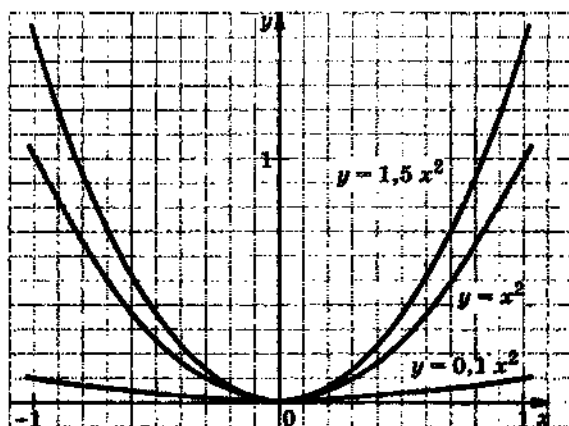
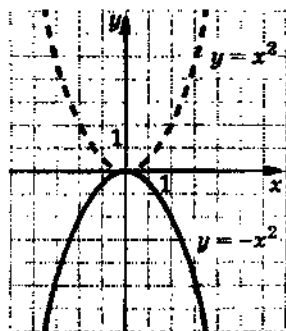
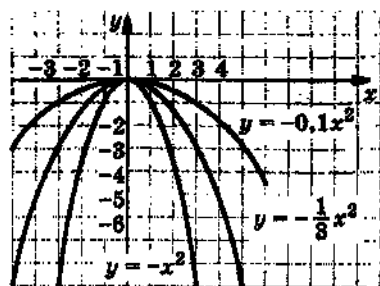


Рис. 28



а)



б)

Рис. 29

абсцисс, а затем растянуть полученный график от оси абсцисс в $-a$ раз (рис. 29, а, б).

▼ Для тех, кто из курса геометрии знаком с понятием гомотетии, заметим, что график функции $y = ax^2$ получается из графика функции $y = x^2$ с помощью гомотетии с центром в начале координат и коэффициентом $\frac{1}{a}$ (рис. 30). Отсюда, в частности, следует, что все параболы подобны. Δ

2. Переход от графика функции $y = ax^2$ к графику функции $y = ax^2 + bx + c$ можно осуществить с помощью двух переносов параллельно осям координат. Сначала выделим квадрат двучлена из выражения $ax^2 + bx + c$:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} = a(x - x_0)^2 + y_0,$$

где $x_0 = -\frac{b}{2a}$ и $y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$.

Затем с помощью переноса на x_0 , параллельно оси абсцисс, из графика функции $y = ax^2$ получим график функции $y = a(x - x_0)^2$, и, наконец, перенеся получившийся график параллельно оси ординат на y_0 , придем к графику функции $y = ax^2 + bx + c$ (рис. 31). Понятно, что этот график представляет собой параболу с вершиной в точке $\left(-\frac{b}{2a}; \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$.

Зафиксируем в таблице преобразования графиков, с которыми мы встретились при построении графика квадратичной функции.

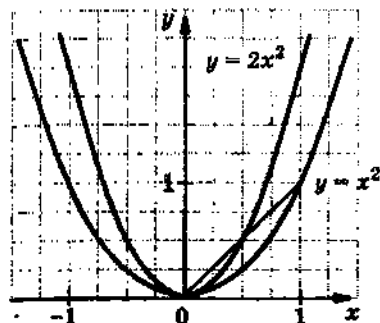


Рис. 30

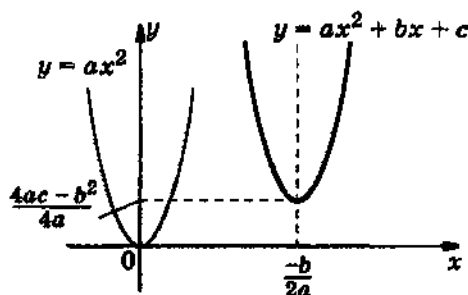


Рис. 31

Исходный график	Преобразование	Новый график
$y = f(x)$	Симметрия относительно оси абсцисс	$y = -f(x)$
$y = f(x)$	Растяжение от оси абсцисс в k раз	$y = kf(x)$
$y = f(x)$	Перенос вдоль оси абсцисс на a	$y = f(x - a)$
$y = f(x)$	Перенос вдоль оси ординат на a	$y = f(x) + a$

Эти и другие преобразования часто используются при построении различных графиков.

Пример 1. Построить график дробно-линейной функции $y = \frac{4x+2}{2x-1}$.

Решение. Преобразуем выражение $\frac{4x+2}{2x-1}$:

$$\frac{4x+2}{2x-1} = \frac{4x-2+4}{2x-1} = \frac{4x-2}{2x-1} + \frac{4}{2x-1} = 2 + \frac{2}{x-0,5}.$$

График функции $y = \frac{2}{x-0,5} + 2$ можно получить из графика функции $y = \frac{1}{x}$ с помощью цепочки преобразований:

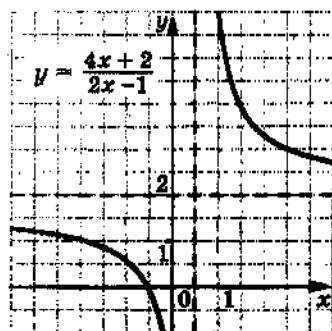


Рис. 32

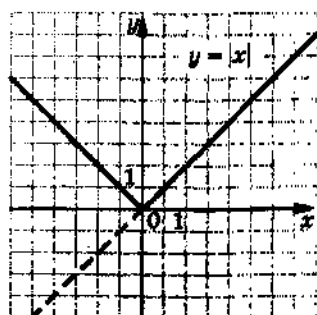


Рис. 33

$$\frac{1}{x} \rightarrow \frac{1}{x-0,5} \rightarrow \frac{2}{x-0,5} \rightarrow \frac{2}{x-0,5} + 2 \text{ (рис. 32).}$$

Полученный график имеет горизонтальную и вертикальную асимптоты: $y = 2$, $x = 0,5$.

Функция $y = \frac{4x+2}{2x-1}$ определена на объединении интервалов $(-\infty; 0,5) \cup (0,5; +\infty)$, непрерывна и убывает на каждом из интервалов $(-\infty; 0,5)$ и $(0,5; +\infty)$.

Пример 2. Построить график функции $y = |x|$.

Решение. Будем преобразовывать график функции $y = x$.

1) Заметим, что все точки графика $y = x$ с неотрицательными абсциссами принадлежат графику $y = |x|$, т. е. при преобразовании графика остаются на месте.

2) Поскольку $|-x| = |x|$, точки графика $y = |x|$ в левой полуплоскости симметричны его точкам в правой полуплоскости относительно оси ординат. Этими точками заменяется часть исходного графика $y = x$, расположенная в левой координатной полуплоскости (рис. 33).

Примечание 1. Рассуждения, которые мы провели, останутся справедливыми при преобразовании любого графика функции $y = f(x)$ в график функции $y = |f(x)|$.

Примечание 2. При построении графика функции $y = |x|$ можно было рассуждать и по-другому. Так, поскольку постановка знака модуля не изменяет положительных чисел и нуля, а отрицательные числа заменяет на их противоположные, мы могли оставить на месте все точки графика $y = x$ в верхней полуплоскости и заменить на симметричные относительно оси абсцисс все его точки нижней полуплоскости. Такое преобразование позволяет переходить от графика функции $y = f(x)$ к графику функции $y = |f(x)|$.

Дополним список преобразований графиков.

Исходный график	Преобразование	Новый график
$y = f(x)$	Симметрия относительно оси ординат	$y = f(-x)$
$y = f(x)$	Симметрия относительно начала координат	$y = -f(-x)$
$y = f(x)$	Уничтожение части графика слева от оси ординат и дублирование оставшейся части симметрично относительно оси ординат	$y = f(x)$
$y = f(x)$	Симметрия относительно оси абсцисс частей графика, расположенных в нижней полуплоскости	$y = f(x) $
$y = f(x)$	Уничтожение части графика под осью абсцисс и дублирование оставшейся части симметрично относительно оси абсцисс	$ y = f(x)$

Примечание. Последнее преобразование приводит к графику, который, вообще говоря, не является графиком функции y .

Пример 3. Построить график уравнения $|y| = x^2 - 2|x|$.

Решение. Выполним цепочку преобразований графика функции $y = x^2 - 2x$:

$$y = x^2 - 2x \rightarrow y = |x|^2 - 2|x| \rightarrow \\ \rightarrow |y| = |x|^2 - 2|x| \text{ (рис. 34).}$$

▼ **Пример 4.** Изобразить множество точек координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$\frac{y^2 - x^2 + 2|x| - 1}{4 - x^2 - y} > 0.$$

Решение. Будем решать эту задачу способом, напоминающим метод интервалов. Сначала отметим точки, координаты которых обращают в нуль числитель и знаменатель данной дроби:

$$y^2 - x^2 + 2|x| - 1 = 0, y^2 = (|x| - 1)^2, y = |x| - 1 \text{ или } y = -|x| + 1. \\ 4 - x^2 - y = 0, y = 4 - x^2.$$

Построенные линии разделили координатную плоскость на 10 областей, для координат точек каждой из которых дробь

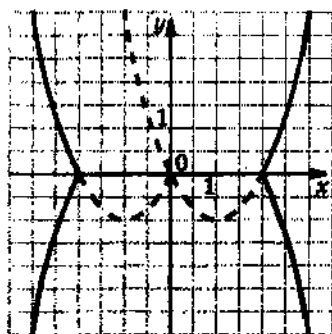


Рис. 34

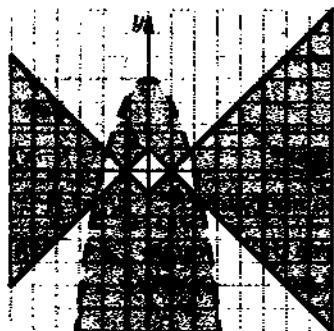


Рис. 35

сохраняет знак (рис. 35). Остается определить знак дроби в каждой из областей или определить его в одной из областей и учесть, что при пересечении любой из линий дробь изменяет свой знак. Так, например, для точки $(0; 5)$ значение дроби отрицательно, следовательно, соответствующая область в искомое множество не входит, а соседние с ней входят — их следует закрасить.

Примечание. Точки, в которых числитель дроби обращается в нуль, входят в искомое множество — они отмечены сплошной линией, а линии, точки которой обращают в нуль знаменатель, — штриховая. $\triangle$

Упражнения

59. Найдите координаты вершины параболы:

1) $y = \frac{2}{3}x^2 + 6;$

5) $y = -2x^2 + 8x + 3;$

2) $y = -\frac{3}{4}x^2 - 2;$

6) $y = -2x^2 - 8x + 3;$

3) $y = x^2 - 4x + 1;$

7) $y = 2x^2 - 10x;$

4) $y = -x^2 - 6x + 5;$

8) $y = 0,5x^2 + 7x.$

60. Задайте уравнением какую-нибудь параболу с вершиной в точке: 1) $(0; 2)$; 2) $(2; 0)$; 3) $(-2; 3)$; 4) $(3; -2)$ так, чтобы ветви параболы были направлены: а) вверх; б) вниз.

61. Постройте график функции $y = f(x)$, если:

1) $f(x) = 0,5x^2 - 5x + 2;$

2) $f(x) = -0,5x^2 + 4x + 3.$

Найдите по графику:

а) $f(-1)$; б) $f(2)$;

в) все значения x , при которых $f(x) = 6$;

г) все значения аргумента, при которых $f(x) > 6$;

д) промежутки возрастания и убывания функции;

е) наибольшее и наименьшее значения, которые принимает функция на промежутке $[-1; 7]$.

62. Изобразите схематически, каким может быть график функции $y = x^2 + bx + c$, если уравнение $x^2 + bx + c = 0$ имеет:

- 1) два положительных корня;
- 2) два отрицательных корня;
- 3)[○] единственный положительный корень;
- 4)[○] единственный отрицательный корень;
- 5)[●] оба корня на промежутке $[-1; 2]$;
- 6)[●] ни одного корня на промежутке $[-1; 2]$.

Что можно сказать в заданиях 1—5 об абсциссе вершины соответствующей параболы?

63. При каких значениях k неравенство:

1) $2x^2 - 6x + k > 0$; 2) $kx^2 - 8x - 20 < 0$

а) верно при всех значениях x ;

б) верно при всех значениях x , кроме одного;

в)[○] неверно ни при каком значении x ?

64[●]. Определите знак числа a , если известно, что квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет корней и $a - b + c > 0$.

65[●]. Найдите все значения a , при которых:

1) один корень уравнения $x^2 - 2x + a = 0$ больше, а другой меньше, чем a ;

2) уравнение $x^2 - ax + a - 1 = 0$ имеет единственный положительный корень.

66[●]. Имеет ли корни уравнение:

1) $957x^2 - 4x - 23 = 0$;

3) $114x^2 - 497x + 379 = 0$;

2) $311x^2 - 821x + 431 = 0$;

4) $613x^2 + 812x + 135 = 0$?

67[○]. Найдите наибольшее и наименьшее значения, которые принимает функция:

1) $y = \sqrt{2x^2 + 5x + 1}$ на промежутке $[3; 4]$;

2) $y = \sqrt{\frac{1}{2}x^2 - 5x + 13}$ на промежутке $[3; 6]$;

3)[●] $y = \frac{6}{\sqrt{3 + x - \frac{1}{4}x^2}}$ на промежутке $[-1; 3]$;

4)[●] $y = \frac{-6}{\sqrt{2x^2 - x - 1}}$ на промежутке $[2; 3]$.

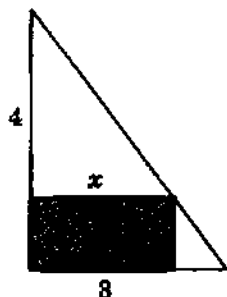


Рис. 36

68°. В прямоугольный треугольник с катетами 3 см и 4 см вписан прямоугольник (рис. 36). Обозначив буквой x длину его стороны, параллельной меньшему катету, выразите площадь S (см²) прямоугольника. Укажите область определения и область значений функции $y = S(x)$.

69°. Постройте график дробно-линейной функции:

1) $y = 3 - \frac{2}{x}$; 3) $y = \frac{2x-1}{x+1}$;

2) $y = \frac{3}{x} - 2$; 4) $y = \frac{2-3x}{x-1}$.

Напишите уравнения асимптот этого графика и укажите промежутки возрастания или убывания данной функции.

70°. Перерисуйте в тетрадь график функции $y = f(x)$: 1) рис. 3; 2) рис. 4; 3) рис. 5; 4) рис. 6 (с. 13). Преобразуйте его в график, заданный уравнением: а) $y = 0,5f(x)$; б) $y = f(x-1)$; в) $y = f(x) - 2$; г) $y = -f(x)$; д) $y = f(-x)$; е) $y = f(|x|)$; ж) $y = |f(x)|$; з) $|y| = f(x)$; и) $y = f(|-x|)$; к) $y = |f(|x|)|$; л) $|y| = |f(|x|)|$. Запишите цепочку преобразований и назовите преобразования, которые вы использовали. Какие из полученных графиков задают функцию y , функцию x ?

71°. С помощью преобразований постройте график уравнения:

- | | |
|----------------------|-----------------------------|
| 1) $y = - x $; | 6) $ y = x+2 $; |
| 2) $y = x+3 $; | 7) $ y + x = 4$; |
| 3) $y = 2 - x $; | 8) $ y = 4 + 3 x - x^2$; |
| 4) $y = x+3 - 1$; | 9) $y = \{ x \}$; |
| 5) $ y = x-1 $; | 10) $y = [x]$. |

Назовите преобразования, которые вы использовали.

Какие из построенных графиков задают функцию y , функцию x ?

72°. Каким уравнением будет задаваться график, полученный из графика функции $y = f(x)$:

- 1) симметрией относительно прямой $x = 3$;
- 2) симметрией относительно прямой $y = -5$;

3) уничтожением его части, расположенной справа от оси ординат, и дублированием оставшейся части симметрично относительно оси ординат;

4) уничтожением его части, расположенной над осью абсцисс, и дублированием оставшейся части симметрично оси абсцисс;

5) симметрией относительно точки $M(-3; 5)$;

6)* уничтожением его частей, расположенных в I, II и IV координатных четвертях и дублированием оставшейся части симметрично относительно осей и начала координат?

73[•]. Закрасьте множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству:

1) $(y + 2x)(y - x) > 0$;

4) $\frac{y - |x|}{y + x^2 - 4} < 0$;

2) $(y - x + 3)(2y + x - 4) < 0$;

5) $\frac{x^2 + y^2 - 4}{y - x^2 + 1} < 0$;

3) $\frac{y - x^2 + 2}{y + x} > 0$;

6) $\frac{y^2 - x^2 - 2x - 1}{y - x^2 - 2x - 1} > 0$.

74[•]. Закрасьте на координатной плоскости фигуру, координаты точек которой удовлетворяют системе неравенств:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 < 4, \\ y > x^2 - 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + (y - 2)^2 < 4, \\ y > |x|; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y < 4 - x^2, \\ y < x + 1, \\ 2y + x > 2. \end{cases}$

Контрольные вопросы и задания

1. Задайте какую-нибудь функцию, графиком которой является парабола с вершиной в точке $(-3; 4)$, ветви которой направлены вниз.

2. Задайте аналитически дробно-линейную функцию, асимптотами которой являются прямые $x = -1$ и $y = 2$. Сколько существует таких функций?

3. Постройте график функции $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 4$ и укажите ее свойства.

4. Запишите уравнение, график которого, изображенный на рисунке 37, получен с помощью преобразований параболы.

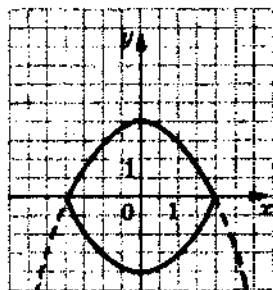


Рис. 37



СТЕПЕНИ И КОРНИ

Со степенными функциями $y = x^n$, где n — натуральное число, вы познакомились в курсе алгебры основной школы. В этой главе вы сначала повторите основные свойства степенных функций (п. 5), затем от квадратных корней перейдете к корням натуральной степени n ($n \neq 1$) и научитесь применять их свойства (п. 6, 7). И, наконец, познакомитесь со степенями, показатели которых — дробные числа (п. 8).

5. Степенная функция $y = x^n$ при натуральном n

Рассмотрим две степенные функции $y = x^2$ и $y = x^3$ и сравним их свойства (рис. 38, 39).

1. Обе эти функции определены и непрерывны на всей числовой прямой.

2. График функции $y = x^2$ симметричен относительно оси ординат, а график функции $y = x^3$ симметричен относительно начала координат.

Это свойство можно сформулировать иначе:

При перемене знака аргумента значение функции $y = x^2$ не изменяется, а значение функции $y = x^3$ меняет знак.

3. Область значений функции $y = x^2$ — все неотрицательные числа.

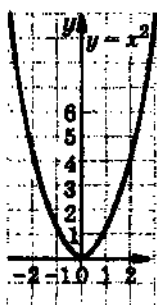


Рис. 38

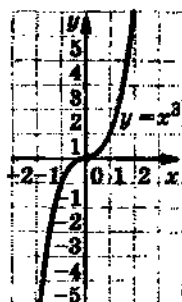
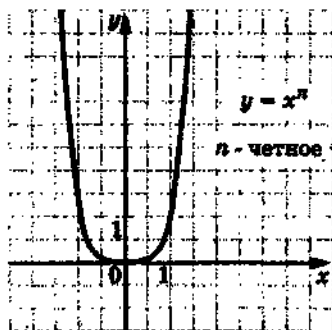
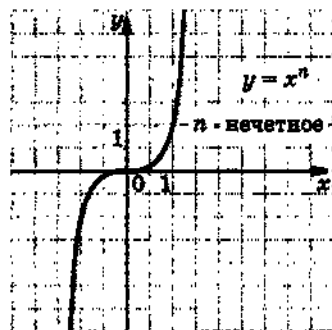


Рис. 39



а)



б)

Рис. 40

Область значений функции $y = x^3$ — все действительные числа.

4. Функция $y = x^2$ убывает на промежутке $(-\infty; 0]$ и возрастает на промежутке $[0; +\infty)$.

Функция $y = x^3$ возрастает на всей числовой прямой.

На следующих двух рисунках изображены графики функций $y = x^n$ при четном (рис. 40, а) и нечетном (рис. 40, б) n .

Можно заметить, что при четных n свойства степенных функций аналогичны свойствам функции $y = x^2$, а при нечетных — функции $y = x^3$.

Свойства функции $y = x^n$

1. Функция $y = x^n$ определена и непрерывна на всей числовой прямой.

2. График функции $y = x^n$ при четном n симметричен относительно оси ординат, а при нечетном n симметричен относительно начала координат.

3. Область значений функции $y = x^n$ при четном n — все неотрицательные числа, а при нечетном n — все действительные числа.

4. Функция $y = x^n$ при четном n убывает на промежутке $(-\infty; 0]$ и возрастает на промежутке $[0; +\infty)$.

Функция $y = x^n$ при нечетном n возрастает на всей числовой прямой.

Свойством 2 обладают не только степенные функции, но названия этому свойству дали по степенным функциям:

Функция $y = f(x)$ называется *четной*, если выполняются два условия:

1) для любого значения x из $D(f)$ $-x$ тоже входит в $D(f)$;

2) $f(-x) = f(x)$.

Функция $y = f(x)$ называется *нечетной*, если выполняются два условия:

1) для любого значения x из $D(f)$ $-x$ тоже входит в $D(f)$;

2) $f(-x) = -f(x)$.

Пример 1. Доказать, что функция $y = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^3-x}$ является нечетной.

Для доказательства нужно проверить выполнение двух условий из определения нечетной функции.

Доказательство. 1) Найдем $D(y)$. Числитель дроби показывает, что $-2 < x < 2$, а знаменатель, — что $x \neq 0; \pm 1$.

Значит, $D(y) = [-2; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2]$. Найденное множество точек числовой прямой *симметрично относительно нуля*, следовательно, вместе с любым числом из этого множества в него входит и противоположное число.

$$2) y(-x) = \frac{\sqrt{4-(-x)^2}}{(-x)^3-(-x)} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{-x^3+x} = -\frac{\sqrt{4-x^2}}{x^3-x} = -y(x).$$

Оба условия выполняются, а значит, функция $y = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^3-x}$ — нечетная, что и требовалось доказать.

Пример 2. Может ли при каком-нибудь значении a уравнение $x^8 - 4x^4 - 3ax^2 = 2$ иметь нечетное число корней.

Решение. 1. Многочлен, стоящий в левой части уравнения, при любом значении a задает функцию $y = x^8 - 4x^4 - 3ax^2$, определенную на всей числовой прямой. При перемене знака у аргумента значение функции не меняется, значит, эта функция четная.

2. Если некоторое, отличное от нуля, значение x является корнем данного уравнения, т. е. при этом значении $y(x) = 2$, то и противоположное ему число также корень этого уравнения: $y(-x) = 2$. Следовательно, число *ненулевых* корней уравнения четно.

3. $x = 0$ не является корнем данного уравнения, значит, число *всех* его корней четно.

Ответ. Число корней данного уравнения ни при каком значении a не является нечетным.

Примечание. Говоря о четности числа ненулевых корней уравнения, мы тем самым предположили, что множество этих кор-

ней конечно. Это утверждение нетрудно доказать, воспользовавшись, например, следствием из *теоремы Безу* о разложении многочлена n -й степени на множители: $P_n(x) = (x - x_0)Q_{n-1}(x)$, где $P_n(x)$ и $Q_{n-1}(x)$ — многочлены от одной переменной соответственно n -й и $(n - 1)$ -й степени, и $P_n(x_0) = 0^1$. Отсюда, в частности, следует, что число корней многочлена не превосходит его степени.

Упражнения

75. Существует ли натуральное n , при котором график функции $y = x^n$ проходит через точку:

- 1) $A(7; 343)$; 3) $C(-\frac{2}{3}; -\frac{32}{243})$; 5) $E(-3; -6561)$?
 2) $B(-6; 1296)$; 4) $D(-0,2; -0,0000001024)$;

76. Каким натуральным числом, кроме 1, может быть показатель степени аргумента функции $y = x^n$, если известно, что при некотором целом значении x значение функции y равно:

- 1) 4; 2) 8; 3) -8; 4) 16; 5) 81; 6) 64; 7) -64?

77. В каких координатных четвертях расположен график функции:

- 1) $y = x^{11}$; 4) $y = (x - 5)^{10}$;
 2) $y = x^{16}$; 5) $y = (x - 4)^{17} - 10$;
 3) $y = (x + 3)^7$; 6) $y = (x + 6)^{24} + 17$

78*. Может ли график функции $y = (x - a)^n + b$ иметь точки во всех координатных четвертях, если: 1) n — четное натуральное число; 2) n — нечетное натуральное число. Если может, приведите конкретные значения a , b и n .

79*. Определите, через какие координатные четверти проходит график функции $y = k(x - a)^n + b$, где: 1) n — четное натуральное число; 2) n — нечетное натуральное число, причем:

- а) $k > 0, a > 0, b > 0$; д) $k < 0, a > 0, b > 0$;
 б) $k > 0, a > 0, b < 0$; е) $k < 0, a > 0, b < 0$;
 в) $k > 0, a < 0, b > 0$; ж) $k < 0, a < 0, b > 0$;
 г) $k > 0, a < 0, b < 0$; з) $k < 0, a < 0, b < 0$.

¹ Французский математик Этьен Безу (1730—1783) доказал, что $P_n(x) = (x - x_0)Q_{n-1}(x) + P_n(x_0)$, где x_0 — любое число. В случае, когда это число — корень многочлена, имеем $P_n(x_0) = 0$ и $P_n(x) = (x - x_0)Q_{n-1}(x)$.

80°. Определите, если возможно, четным или нечетным числом является показатель степени n функции $y = f(x)$, где $f(x) = x^n$, зная, что:

- 1) $f(-5) > f(-3)$; 3) $f(-5) < f(-3)$; 5) $f(5) > f(-3)$;
 2) $f(-5) > f(3)$; 4) $f(-5) < f(3)$; 6) $f(5) > f(3)$.

81. Сравните, если возможно, натуральные числа m и n , зная, что:

- 1) $1,3^m < 1,3^n$; 4) $(\sqrt{2})^m < (\sqrt{2})^n$;
 2) $0,3^m < 0,3^n$; 5) $(1 - \sqrt{2})^m < (1 - \sqrt{2})^n$.
 3) $\left(\frac{3}{\pi}\right)^m < \left(\frac{3}{\pi}\right)^n$;

82. С помощью каких преобразований из графика функции $y = x^n$ можно получить график функции:

1) $y = -x^n$; 2) $y = 0,2x^n$? * Можно ли утверждать, что все три функции $y = x^n$, $y = -x^n$ и $y = 0,2x^n$ имеют одинаковую четность (все они четные или все они нечетные)?

83. Докажите, что следующие функции являются четными:

- 1) $y = 3x^6 - 3x^2 + 7$; 3) $y = x^n \cdot x^{n+2} - 4$.

2) $y = \frac{x^6 + 8}{x^2}$;

84. Докажите, что следующие функции являются нечетными:

- 1) $y = 3x^5 - 5x^3$; 3) $y = x^n \cdot x^{n+1} - x$.

2) $y = \frac{x^6 + 8}{x^3 - x}$;

85°. Является ли функция четной, нечетной или она не является ни четной, ни нечетной:

1) $y = \begin{cases} -x^2 & \text{при } x < 0, \\ x^2 & \text{при } x \geq 0; \end{cases}$ 3) $y = \begin{cases} -(x+1)^2 & \text{при } x < 0, \\ (x-1)^2 & \text{при } x \geq 0; \end{cases}$

2) $y = \begin{cases} -x^3 & \text{при } x < 0, \\ x^3 & \text{при } x \geq 0; \end{cases}$ 4) $y = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{при } x < 1, \\ -(x-1)^2 & \text{при } x \geq 1? \end{cases}$

Постройте графики этих функций. Какая из функций имеет точку разрыва?

86°. Представьте следующую функцию как сумму четной и нечетной функций:

1) $y = 4x^6 + 5x - 4$;

2) $y = \frac{|x| - 2x^3}{x^6 - 1}$.

87°. Является ли: 1) сумма; 2) разность; 3) произведение; 4) частное четной и нечетной функций с одинаковыми областями определения: а) четной; б) нечетной функцией?

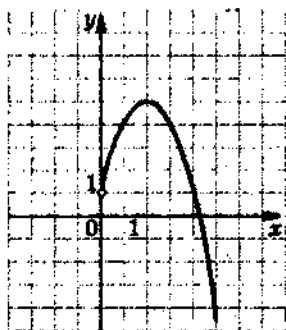


Рис. 41

88. На рисунке 41 изображена часть параболы. Дополните ее так, чтобы получившийся график задавал:

- 1) четную функцию; 2) нечетную функцию.

• Задайте эту функцию формулой или кусочно и укажите промежутки ее возрастания и убывания. Имеет ли эта функция точку разрыва?

89°. Может ли при каком-нибудь значении a уравнение:

1) $2x^6 - x^4 + ax^2 = 1$ иметь ровно три корня;

2) $ax^8 - 5x^6 + 4x^4 - x^2 = 8$ иметь ровно пять корней?

90°. Подберите корень многочлена среди делителей свободного члена и разложите многочлен на множители с помощью следствия из теоремы Безу:

1) $P(x) = x^3 + 3x^2 - 10x - 24$;

2) $P(x) = 2x^3 - 7x^2 - 2x + 7$;

3) $P(x) = 2x^3 + x^2 - 13x + 6$;

4) $P(x) = 3x^4 - 11x^3 - 10x^2 + 22x + 8$;

5) $P(x) = 2x^4 + 5x^3 - 10x^2 + 5x - 12$.

91°. Для каждого из многочленов $P(x)$, указанных в предыдущем номере, решите уравнение $P(x) = 0$ и неравенство $P(x) \leq 0$.

Контрольные вопросы и задания

1. Назовите свойства, общие для всех функций $y = x^n$, где n — натуральное число.

2. Назовите свойства функций $y = x^n$, различные для четных и нечетных n .

3. Можно ли сделать вывод о том, что $m > n$, зная, что при некотором положительном a верно неравенство $a^m > a^n$? Укажите все положительные значения a , при которых этот вывод верен.

4. Является ли функция $y = 5x^5 - 3x^2 + x - 1$ четной, нечетной или она не является ни четной, ни нечетной?

6. Понятие корня n -й степени

По графику функции $y = x^2$ для любого положительного числа a можно найти числа, квадраты которых равны a . Эти числа мы называли квадратными корнями из a (рис. 42, а).

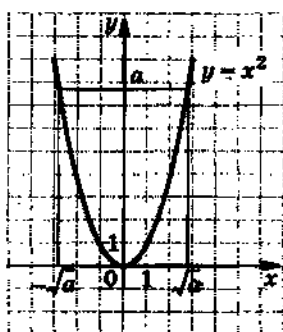
По графику функции $y = x^3$ для любого числа a можно найти такое число b , что $b^3 = a$ (рис. 42, б). Это число называют кубическим корнем из a или корнем третьей степени из a .

Вообще, по графику функции $y = x^n$ можно найти число, n -я степень которого известна.

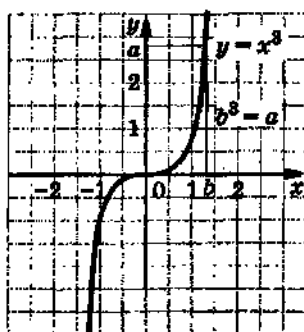
Число, n -я степень которого равна a , называют корнем n -й степени из a .

Так, корнем пятой степени из числа -32 является число -2 , так как $(-2)^5 = -32$, а корнями четвертой степени из числа 16 являются противоположные числа 2 и -2 , так как $2^4 = (-2)^4 = 16$.

При любом a прямая $y = a$ имеет с графиком функции $y = x^n$, где n — нечетное натуральное число, отличное от 1, одну общую



а)



б)

Рис. 42

точку (рис. 43, а), абсцисса которой является корнем n -й степени из a . Этот корень обозначают $\sqrt[n]{a}$ (читается: корень n -й степени из a).

При любом положительном a прямая $y = a$ имеет с графиком функции $y = x^n$, где n — четное натуральное число, две общие точки (рис. 43, б), абсциссы которых являются корнями n -й степени из a . Один из этих корней положителен, его обозначают $\sqrt[n]{a}$, другой — противоположное ему число, т. е. $-\sqrt[n]{a}$.

Корень четной степени из 0 равен 0 ($0^n = 0$ при любом натуральном n):

$$\sqrt[n]{0} = 0.$$

Любое число, возведенное в степень с четным натуральным показателем, неотрицательно, следовательно, не существует корня четной степени из отрицательного числа.

В записи $\sqrt[n]{a}$ называют *подкоренным числом* или *подкоренным выражением*, а n — *показателем степени корня*.

При записи квадратных корней показатель степени корня не указывают.

В зависимости от четности или нечетности n выражение $\sqrt[n]{a}$ имеет или не имеет смысл при отрицательных a . Из-за этого при проведении общих рассуждений относительно корней n -й степени приходится рассматривать два случая. Естественно поэтому при рассмотрении свойств ограничиться корнями из неотрицательных чисел — арифметическими корнями n -й степени. А корни нечетной степени из отрицательных чисел, которые при этом как бы остаются «за бортом», можно будет

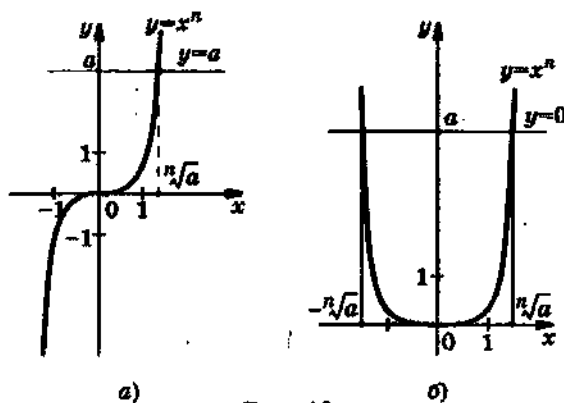


Рис. 43

всегда выразить через арифметические: $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$, где n — нечетное число, $a > 0$. Это следует, например, из симметрии точек A и A_1 графика функции $y = x^n$ относительно начала координат (рис. 44). Так, например, $\sqrt[3]{-11} = -\sqrt[3]{11}$.

Формула $y = \sqrt[n]{x}$ позволяет для любого неотрицательного значения переменной x найти единственное соответствующее значение переменной y и, следовательно, задает y как функцию x .

Для решения обратной задачи — нахождения значения переменной x по заданному значению y из этой формулы можно выразить переменную x как функцию переменной y : $x = y^n$. Равенствам $x = y^n$ и $y = \sqrt[n]{x}$ удовлетворяют координаты одних и тех же точек (мы продолжаем рассматривать только неотрицательные значения x и y). Другими словами, функции $y = \sqrt[n]{x}$ и $x = y^n$ имеют один и тот же график.

И этот график можно получить, преобразовав график функции $y = x^n$.

Рассмотрим степенные функции $y = x^n$ и $x = y^n$ при $x > 0$, $y > 0$ (напомним, что аргументом второй функции является переменная y). Пусть точка $M(a; b)$ принадлежит графику функции $y = x^n$, тогда $b = a^n$. Но из этого же равенства следует, что точка $N(b; a)$ принадлежит графику функции $x = y^n$. Прямая $y = x$ проходит через противоположные вершины квадрата с диагональю MN (рис. 45) и, значит, является его осью симметрии. Следовательно, точки $M(a; b)$ и $N(b; a)$ симметричны относительно прямой $y = x$.

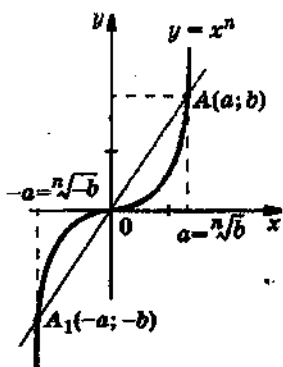


Рис. 44

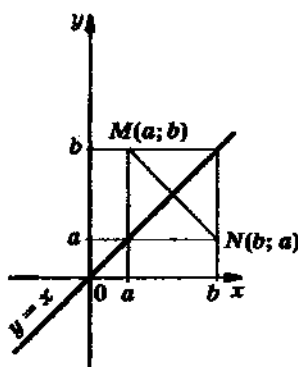


Рис. 45

Аналогично можно показать, что любой точке графика функции $x = y^n$ соответствует симметричная ей относительно прямой $y = x$ точка графика функции $y = x^n$.

Таким образом, графики функций $y = x^n$ и $y = \sqrt[n]{x}$ (напомним, что функции $y = \sqrt[n]{x}$ и $x = y^n$ имеют один и тот же график) симметричны относительно прямой $y = x$. В дальнейшем нам встретятся и другие пары функций с симметричными относительно прямой $y = x$ графиками.

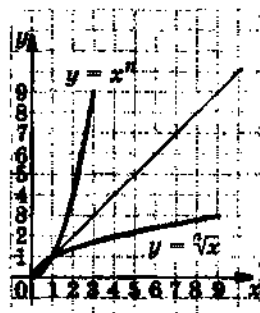


Рис. 46

Функции $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$, графики которых симметричны относительно прямой $y = x$, называют **взаимно обратными**, а каждую из таких функций — **обратимой**.

Рассматривая схематические графики взаимно обратных функций $y = x^n$ и $y = \sqrt[n]{x}$, изображенные на рисунке 46, можно сформулировать некоторые основные свойства функции $y = \sqrt[n]{x}$, при $x > 0$.

Свойство 1. Функция возрастает, так как точка графика с большей абсциссой имеет и большую ординату.

Свойство 2. График функции проходит через точки с координатами $(0; 0)$ и $(1; 1)$.

Свойство 3. Из симметрии графиков функций $y = x^n$ и $y = \sqrt[n]{x}$ следует, что значения функции $y = \sqrt[n]{x}$ могут быть как угодно велики.

На рисунке 47 изображены графики функций $y = \sqrt[n]{x}$ при $x > 0$ для n , равных: 2; 3 и 4.

Можно заметить, что график той из функций $y = \sqrt[n]{x}$, у которой показатель степени корня n больше, на промежутке $(0; 1)$ находится выше, а на промежутке $(1; +\infty)$ — ниже других.

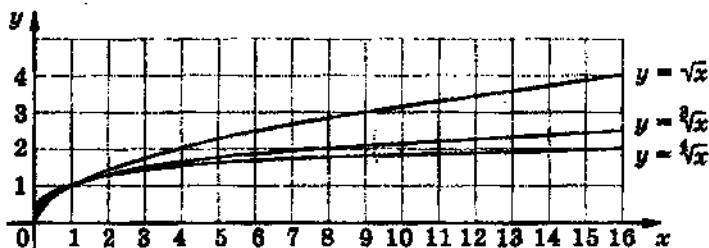


Рис. 47

Пример 1. Решить неравенство $\frac{\sqrt[3]{x^2-25}}{\sqrt{x+6}-2} < 0$.

Решение. Подкоренные выражения должны быть неотрицательны:

$$\begin{cases} x^2 - 25 > 0, \\ x + 6 > 0, \end{cases} \begin{cases} x < -5 \text{ или } x > 5, \\ x > -6, \end{cases} \quad -6 < x < -5 \text{ или } x > 5.$$

При $-6 < x < -5$ или $x > 5$ числитель дроби положителен. Найдем нули знаменателя:

$$\sqrt{x+6} - 2 = 0, \quad \sqrt{x+6} = 2, \quad x+6 = 4, \quad x = -2.$$

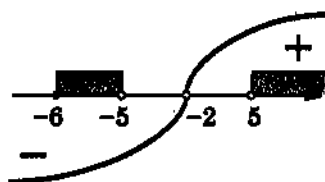


Рис. 48

При $x > -2$ значения знаменателя положительны, а при $-6 < x < -2$ — отрицательны. Значит, при $x > 5$ дробь принимает положительные значения, а при $-6 < x < -5$ — отрицательные (рис. 48).

Ответ. $-6 < x < -5$.

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x-2} = 4$.

Примечание. Уравнения, в которых неизвестное стоит под знаком радикала, называют *иррациональными*. Обычный способ решения — избавиться от радикалов, возводя обе части уравнения в степень. Однако при этом следует иметь в виду, что при возведении в четную степень могут появиться лишние, так называемые *посторонние*, корни. Так, например, возводя в квадрат уравнение $\sqrt{x} = -1$, не имеющее корней, мы получим уравнение $x = 1$, корень которого не является корнем исходного уравнения — посторонний корень.

Решение. Перед тем как возводить данное уравнение в квадрат, полезно разнести радикалы по разным частям уравнения:

$$\sqrt{2x+3} + \sqrt{x-2} = 4, \quad \sqrt{2x+3} = 4 - \sqrt{x-2},$$

$$2x+3 = 16 + x-2 - 8\sqrt{x-2}, \quad 8\sqrt{x-2} = 11-x.$$

Еще раз возводим в квадрат:

$$64(x-2) = 121 + x^2 - 22x, \quad x^2 - 86x + 249 = 0, \quad x_1 = 3, \quad x_2 = 83.$$

Теперь следует проверить, являются ли найденные числа корнями исходного уравнения, т. е. нет ли среди найденных корней посторонних.

Проверка. 1) При $x = 3$: $\sqrt{2 \cdot 3 + 3} + \sqrt{3 - 2} = 4$ — верно.

2) При $x = 83$: $\sqrt{2 \cdot 83 + 3} + \sqrt{83 - 2} = 4$ — неверно (так как уже первый корень больше 4).

Ответ. 3.

Примечание. Можно было найти подбором корень $x = 3$, и, поскольку левая часть уравнения задает возрастающую функцию, сделать вывод об отсутствии других корней.

Пример 3. Решить иррациональное неравенство $\sqrt{x^2 + x - 12} > x$.

Решение. Здесь нам также нужно избавиться от радикала. Однако в отличие от уравнений, при решении которых мы находим всего несколько чисел, решение неравенств, как вы знаете, обычно приводит к бесконечному множеству значений переменной и проверить их все невозможно.

Будем рассуждать иначе. Заметим, что, когда правая часть данного неравенства отрицательна, неравенство верно, если, конечно, оно при этом имеет смысл. Значит, все решения системы

$$\begin{cases} x < 0, \\ x^2 + x - 12 > 0 \end{cases} \text{ являются решениями данного неравенства.}$$

Если же правая часть неравенства неотрицательна, то неравенство можно возвести в квадрат (по свойствам неравенств с неотрицательными частями):

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 + x - 12 > x^2. \end{cases}$$

Таким образом, все множество решений исходного неравенства является объединением решений двух систем.

$$\begin{cases} x < 0, \\ x^2 + x - 12 \geq 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 + x - 12 > x^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 0, \\ x \leq -4 \text{ или } x \geq 3 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x \geq 0, \\ x > 12, \end{cases}$$

$$x \leq -4 \text{ или } x > 12.$$

Ответ. $x \leq -4$, $x > 12$.

Примечание. Свойства неравенств с положительными членами удобно использовать и при решении иррациональных уравнений, особенно когда проверка корней трудоемка. На основании соответствующего свойства неравенств или определения квадратного корня, при решении уравнения вида $\sqrt{f(x)} = g(x)$ достаточно проверить, что $g(x) \geq 0$.

Упражнения

92. Верно ли, что:

- 1) число -3 является корнем четвертой степени из числа 81 ;
- 2) число $\frac{1}{2}$ является корнем третьей степени из числа $\frac{1}{8}$;
- 3) число $0,1$ является корнем шестой степени из числа $0,000001$;
- 4) число -10 является корнем пятой степени из числа $-100\,000$?

93. Найдите корни уравнения:

- 1) $x^2 = 10$;
- 2) $x^3 = 16$;
- 3) $x^5 = -43$;
- 4) $x^8 = 15$;
- 5) $(3 - 2x)^3 = 8$;
- 6) $(3x - 2)^5 = -32$;
- 7) $(5 - 3x)^6 = \frac{1}{64}$;
- 8) $(5x + 7)^4 = 81$;
- 9) $(x^2 - 5x + 2)^6 = 64$;
- 10) $(9x - x^2 - 4)^4 = 256$.

94. С помощью графика функции $y = x^3$ найдите приближенные значения кубических корней из чисел:

- 1) 5 ; 2) -7 ; 3) $4,7$; 4) $-6,5$.

95. Принадлежит ли графику функции $y = \sqrt[3]{x}$ точка:

- 1) $A(3,375; 1,5)$; 2) $B(-0,125; -0,5)$; 3) $C(-343; -7)$?

96. Дана функция $y = \sqrt[n]{x}$. Найдите n , если график функции проходит через точку:

- 1) $A(-0,00032; -0,2)$; 2) $B(2187; 3)$.

97. Каким натуральным числом может быть n — показатель степени корня у функции $y = \sqrt[n]{x}$, если известно, что y принимает натуральное значение, когда аргумент x равен:

- 1) 4 ; 2) 8 ; 3) 27 ; 4) 16 ; 5) 81 ; 6) 64 ; 7) 1024 ?

98. Сравните натуральные числа m и n , зная, что:

- 1) $\sqrt[m]{1,7} < \sqrt[n]{1,7}$;
- 2) $\sqrt[m]{0,7} < \sqrt[n]{0,7}$;
- 3) $\sqrt[m]{\frac{1}{\sqrt{2}}} < \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{2}}}$;
- 4) $\sqrt[m]{\frac{\sqrt{10}}{\pi}} < \sqrt[n]{\frac{\sqrt{10}}{\pi}}$;
- 5) $\sqrt[m]{\sqrt{\pi-3}} < \sqrt[n]{\sqrt{\pi-3}}$.

99. Задайте функцию, обратную функции:

1) $y = x$; 3) $y = 2x - 1$;

2) $y = \frac{1}{x}$; 4) $y = 5 - \frac{2}{3}x$.

• Как связаны коэффициенты k_1 и k_2 взаимно обратных линейных функций $y = k_1x + l$ и $y = k_2x + m$?

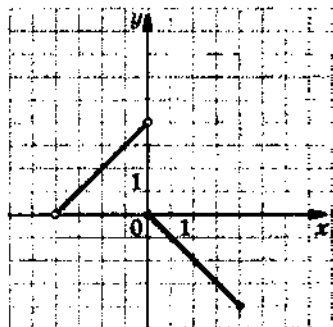


Рис. 49

100. Если функция $y = f(x)$, заданная рисунком 49, обратима, перерисуйте в тетрадь ее график, и в той же системе координат изобразите график обратной ей функции $y = g(x)$.

101. Имеет ли смысл выражение:

1) $\sqrt[4]{10}$; 4) $\sqrt[6]{-8}$; 7) $\sqrt[4]{5 - \sqrt{22}}$;

2) $\sqrt[6]{18}$; 5) $\sqrt[3]{-15}$; 8) $\sqrt[12]{7 - 5\sqrt{2}}$?

3) $\sqrt[4]{-25}$; 6) $\sqrt[5]{-5}$;

102. Выразите через арифметические корни те из корней, которые арифметическими не являются:

1) $\sqrt[3]{-7}$; 4) $\sqrt[2]{3 - \sqrt{5}}$; 7) $\sqrt[7]{x^2 + x + 1}$;

2) $\sqrt[5]{-6}$; 5) $\sqrt[2]{-1 - a^2}$; 8) $\sqrt[9]{-c^2 + 5c - 7}$.

3) $\sqrt[5]{1 - \sqrt{2}}$; 6) $\sqrt[5]{-4 + 4b - b^2}$;

103. При каких значениях x имеет смысл выражение:

1) $\sqrt[6]{x}$; 5) $\sqrt[14]{2x - 5}$; 8) $\sqrt[6]{4x^2 - 1}$;

2) $\sqrt[8]{\frac{1}{x}}$; 6) $\sqrt[7]{3 + 6x}$; 9) $\sqrt[8]{x^2 - x - 90}$;

3) $\sqrt[10]{x^2}$; 7) $\sqrt[4]{25 - x^2}$; 10) $\sqrt[16]{20x - x^2 + 96}$?

4) $\sqrt[12]{\frac{1}{x^2}}$;

104. При каких значениях x не имеет смысла выражение:

1) $\frac{1}{\sqrt{x} - 2}$; 3) $\frac{\sqrt{x}}{x^2 - 4}$; 5) $\frac{\sqrt[10]{x^2 - 25}}{x + 13}$;

2) $\frac{5}{\sqrt{x} + 3}$; 4) $\frac{\sqrt{x+3}}{9 - x^2}$; 6) $\frac{\sqrt[10]{49 - x^2}}{x + 3}$?

105. Решите уравнение:

- 1) $\sqrt[4]{x} = \frac{2}{3}$; 3) $\sqrt[4]{2x+1} = 0,2$; 5) $\sqrt[5]{x^2+7} = 2$;
2) $\sqrt[5]{x} = \frac{1}{2}$; 4) $\sqrt[3]{2-5x} = 0,6$; 6) $\sqrt[3]{x^3+37} = -3$.

106^o. Решите уравнение:

- 1) $\sqrt{3x^2+5x+6} = 1-x$; 5) $\sqrt{x+6} - \sqrt{x} = 1$;
2) $\sqrt{3x^2+7x+6} = x-1$; 6) $\sqrt{x} + \sqrt{13-x} = 5$;
3) $\sqrt{9x^2+16x} = 2x+3$; 7) $\sqrt{3x+7} - \sqrt{x+1} = 2$;
4) $\sqrt{5x^2-15x-1} = 3-2x$; 8) $\sqrt{15-x} + \sqrt{3-x} = 6$.

107. Решите неравенство:

- 1) $\frac{x-7}{\sqrt{4x^2-19x+12}} < 0$; 2) $\frac{\sqrt{17-15x-2x^2}}{x+3} > 0$.

108^o. Решите неравенство:

- 1) $\sqrt{9x-20} > x$; 5) $\sqrt{x^2-x-12} < x$;
2) $\sqrt{2x+15} > x$; 6) $\sqrt{13+8x-5x^2} < 4x$;
3) $x+2 < \sqrt{4+5x}$; 7) $\sqrt{5x^2+x} \geq 3x-1$;
4) $x-1 \geq \sqrt{3x+7}$; 8) $\sqrt{10x^2+9x} > x+2$.

Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение корня n -й степени из числа.

2. Что означает запись $\sqrt[n]{a}$? Что такое арифметический корень n -й степени из числа a ?

3. Почему при решении иррациональных уравнений необходимо делать проверку корней?

4. Решите иррациональное уравнение $\sqrt{11-2x} = 4-x$. Объясните, почему при проверке корней достаточно было бы убедиться, что $4-x \geq 0$.

5. К решению каких систем сводится решение иррационального неравенства $\sqrt{f(x)} > g(x)$?

7. Свойства арифметических корней

Вы знакомы со свойствами квадратных корней. Аналогичными свойствами обладают и арифметические корни n -й степени:

Свойства арифметических корней

Свойства	квадратные корни	корни n -й степени
Свойство 1	$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$	$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
Свойство 2	$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
Свойство 3	$\sqrt{a^m} = (\sqrt{a})^m$	$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$

По определению арифметического корня n -й степени для любого неотрицательного числа a

$$(\sqrt[n]{a})^n = a.$$

Следовательно, чтобы убедиться в справедливости равенства $\sqrt[n]{x} = y$, где $\sqrt[n]{x}$ — арифметический корень n -й степени, нужно проверить выполнение двух условий:

$$1) y \geq 0 \text{ и } 2) y^n = x.$$

Докажем, например, что $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$.

Должно быть: 1) $(\sqrt[n]{a})^m \geq 0$ и 2) $((\sqrt[n]{a})^m)^n = a^m$.

1) $\sqrt[n]{a} \geq 0$, как арифметический корень, значит, и $(\sqrt[n]{a})^m \geq 0$. (Заметим, что если m — целое отрицательное число или 0, то число a должно быть положительным.)

$$2) ((\sqrt[n]{a})^m)^n = (\sqrt[n]{a})^{mn} = ((\sqrt[n]{a})^n)^m = a^m.$$

Оба условия выполняются, значит, равенство $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$ верно.

Приведем примеры использования свойств арифметических корней.

Пример 1. Вынести множитель из-под знака корня: $\sqrt[3]{8a^5}$.
Решение.

$$\sqrt[3]{8a^5} = \sqrt[3]{8a^3 \cdot a^2} = \sqrt[3]{8a^3} \cdot \sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{(2a)^3} \cdot \sqrt[3]{a^2} = 2a \sqrt[3]{a^2}.$$

Пример 2. Упростить выражение

$$(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{a})^2 - \sqrt[3]{x^2} \cdot (\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{a}).$$

Решение. Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые:

$$\begin{aligned} & (\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{a})^2 - \sqrt[3]{x^2} \cdot (\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{a}) = \\ & = \sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{a^2} - 2\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{x^4} + 2\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{a^2}. \end{aligned}$$

Пример 3. Сравнить $2\sqrt[3]{5}$ и $\frac{1}{2}\sqrt[3]{300}$.

Решение. $2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 5} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 5} = \sqrt[3]{40}$;

$$\frac{1}{2}\sqrt[3]{300} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 300} = \sqrt[3]{\frac{1}{8} \cdot 300} = \sqrt[3]{37,5}.$$

Функция $y = \sqrt[n]{x}$ возрастающая, т. е. большему подкоренному числу соответствует большее значение корня: $40 > 37,5$, следовательно, $\sqrt[3]{40} > \sqrt[3]{37,5}$.

Ответ. $2\sqrt[3]{5} > \frac{1}{2}\sqrt[3]{300}$.

Свойства 1—3 используются для преобразования арифметических корней одной и той же степени. Однако в одном выражении могут оказаться корни разных степеней.

Арифметические корни различных степеней связывают следующие два свойства:

Свойство 4. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[n \cdot k]{a}$.

Свойство 5. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a^m}} = \sqrt[n]{a^{\frac{m}{k}}}$.

Докажем свойство 5. Должно быть:

1) $\sqrt[n]{a^m} > 0$ и 2) $(\sqrt[n]{a^m})^{nk} = a^{mk}$.

1) $\sqrt[n]{a^m} \geq 0$, как арифметический корень;

2) $(\sqrt[n]{a^m})^{nk} = ((\sqrt[n]{a^m})^n)^k = (a^{\frac{m}{n}})^k = a^{mk}$.

Примечание. Если показатель степени подкоренного выражения делится на показатель степени корня, то свойство 5 записывается так: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

Например, $\sqrt[7]{3^{28}} = 3^{\frac{28}{7}} = 3^4 = 81$.

Пример 4. Упростить выражение $\sqrt[7]{a^2 \cdot \sqrt[3]{a}}$.

Решение. Внесем a^2 под знак кубического корня:

$$\sqrt[7]{a^2 \cdot \sqrt[3]{a}} = \sqrt[7]{\sqrt[3]{(a^2)^3 \cdot a}}.$$

Применим свойство 4 и упростим подкоренное выражение:

$$\sqrt[7]{3(a^2)^3 \cdot a} = \sqrt[7]{a^6 \cdot a} = \sqrt[7]{a^7}.$$

Применим свойство 5 (сократим показатель степени корня и показатель степени подкоренного выражения):

$$\sqrt[7]{a^7} = 3 \cdot \sqrt[7]{a^7} = \sqrt[3]{a}.$$

$$\text{Итак, } \sqrt[7]{a^2 \cdot 3a} = \sqrt[3]{a}.$$

Пример 5. Представить в виде корня из числа выражение $\frac{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{2}}{\sqrt[6]{6}}$.

Решение. Приведем данные корни к одному и тому же показателю степени. Наиболее простым общим показателем является наименьшее общее кратное показателей степени корней — число 12. $\sqrt[3]{3} = \sqrt[12]{3^4}$; $\sqrt[4]{2} = \sqrt[12]{2^3}$; $\sqrt[6]{6} = \sqrt[12]{6^2}$.

$$\begin{aligned} \text{Таким образом, } \frac{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{2}}{\sqrt[6]{6}} &= \frac{\sqrt[12]{3^4} \cdot \sqrt[12]{2^3}}{\sqrt[12]{6^2}} = \sqrt[12]{\frac{3^4 \cdot 2^3}{6^2}} = \\ &= \sqrt[12]{\frac{3^4 \cdot 2^3}{3^2 \cdot 2^2}} = \sqrt[12]{3^2 \cdot 2} = \sqrt[12]{18}. \end{aligned}$$

Упражнения

109. Докажите, что для арифметических корней верно равенство $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

110. Вычислите:

1) $\sqrt{25 \cdot 81}$; 7) $\sqrt[4]{125 \cdot 405}$;

2) $\sqrt{49 \cdot 0,16}$; 8) $\sqrt[4]{32 \cdot 648}$;

3) $\sqrt[3]{1,6 \cdot 12,1}$; 9) $\sqrt[3]{\frac{5}{36}} : \sqrt[3]{\frac{6}{25}}$;

4) $\sqrt[3]{8 \cdot 27}$; 10) $\sqrt[5]{\frac{27}{125}} \cdot \sqrt[5]{\frac{9}{25}}$;

5) $\sqrt[3]{250 \cdot 32}$; 11) $\sqrt[3]{7 - \sqrt{22}} \cdot \sqrt[3]{7 + \sqrt{22}}$;

6) $\sqrt[3]{1,25 \cdot 6,4}$; 12) $\sqrt[3]{5 - 2\sqrt{6}} \cdot \sqrt[3]{5 + 2\sqrt{6}}$.

111. Вынесите множитель из-под знака корня:

- 1) $\sqrt[11]{2^{12}}$; 4) $\sqrt[4]{b^9}$; 7) $\sqrt[3]{32x^{16}b^{10}}$;
2) $\sqrt[4]{2^{15}}$; 5) $\sqrt[5]{a^6b^{11}}$; 8) $\sqrt[6]{-128a^{18}b^{14}}$.
3) $\sqrt[3]{a^4}$; 6) $\sqrt[4]{-a^5}$;

112. Представьте в виде корня с меньшим показателем:

- 1) $\sqrt[4]{4}$; 4) $\sqrt[30]{85^6}$; 7) $\sqrt[4]{(2-\sqrt{5})^2}$;
2) $\sqrt[6]{27}$; 5) $\sqrt[6]{64x^3}$; 8) $\sqrt[6]{(2\sqrt{6}-5)^2}$.
3) $\sqrt[12]{16a^4}$; 6) $\sqrt[12]{16a^8}$;

113. Запишите с одним знаком радикала:

- 1) $\sqrt[3]{\sqrt{a}}$; 3) $\sqrt{a^3\sqrt{a}}$; 5) $\sqrt[4]{\frac{1}{x^3} \cdot \sqrt[3]{x}}$;
2) $\sqrt[3]{a\sqrt{a}}$; 4) $\sqrt[5]{b^2\sqrt{b}}$; 6) $\sqrt[5]{\frac{1}{a^3} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{a}}}$.

114. Сравните:

- 1) $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$ и $\sqrt[4]{8}$; 3) $\sqrt{3^3\sqrt{3}}$ и $\sqrt[3]{3\sqrt{3}}$;
2) $\sqrt{2}$, $\sqrt[4]{5}$ и $\sqrt[3]{3}$; 4) $\sqrt[4]{8\sqrt{2}}$ и $\sqrt{2^4\sqrt{8}}$.

115. Представьте в виде корня:

- 1) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[6]{0,5}$; 4) $\sqrt[6]{2,5} : \sqrt[4]{0,5}$;
2) $\sqrt[6]{6} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{12}}$; 5) $\sqrt[12]{0,5} \cdot \sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[4]{0,008}$;
3) $\sqrt[8]{1,5} : \sqrt[12]{3}$; 6) $\sqrt[5]{0,6} : \sqrt[10]{9} \cdot \sqrt[4]{10}$.

116. Решите уравнение:

- 1) $\sqrt{x^2+32} - 2\sqrt{x^2+32} = 3$;
2) $\sqrt[3]{3x^4+16} - \sqrt[6]{3x^4+16} = 2$;
3) $x^2 + \sqrt{x^2+20} = 22$;
4) $x^2 + 3x - 18 + 4\sqrt{x^2+3x-6} = 0$;
5) $\sqrt[4]{x^3+1} - \frac{6}{\sqrt[4]{x^3+1}} = 1$;
6) $\frac{4}{\sqrt[3]{x+2}} + \frac{\sqrt[3]{x+3}}{5} = 2$.

117°. Докажите формулу «сложного радикала»:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}.$$

С помощью этой формулы упростите выражение:

$$1) \sqrt{\frac{17 + \sqrt{145}}{2}} - \sqrt{\frac{17 - \sqrt{145}}{2}}; \quad 2) \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} + \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}.$$

118°. Не решая уравнения:

$$1) \sqrt{26 - x} - \sqrt{12 - x} = 2, \text{ найдите значение выражения } \sqrt{26 - x} + \sqrt{12 - x};$$

$$2) \sqrt{5x + 39} + \sqrt{5x - 8} = 10, \text{ найдите значение выражения } \sqrt{5x + 39} - \sqrt{5x - 8}.$$

119°. Решите уравнение:

$$1) \sqrt[3]{1 + \sqrt{x}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{x}} = 2; \quad 2) \sqrt[3]{x + 10} - \sqrt[3]{x - 9} = 1.$$

120°. Решите систему уравнений:

$$1) \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{4}{3}, \\ xy = 9; \end{cases} \quad 3)^\bullet \begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 4, \\ x + y = 28; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 3\sqrt{xy}, \\ x + y = 5; \end{cases} \quad 4)^\bullet \begin{cases} \sqrt[3]{x} \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{y} \sqrt[3]{x} = 12, \\ xy = 64. \end{cases}$$

121°. Найдите все значения a , при которых уравнение имеет единственный корень:

$$1) \sqrt[3]{x + \sqrt{x}} + 4\sqrt[6]{x + \sqrt{x}} + a = 0;$$

$$2) * 2z + \sqrt[4]{z} - 3\sqrt{2z + \sqrt[4]{z}} + 1 + a + 1 = 0.$$

122°. Упростите выражение, считая, что переменные принимают только положительные значения:

$$1) 10\sqrt{\frac{a^4}{b^7}} : 15\sqrt{\frac{a^6}{b^{10}}}; \quad 4) \sqrt[5]{\frac{4x^3}{a^2}} : \left(x\sqrt{\frac{2}{ax}}\right);$$

$$2) \sqrt[4]{\frac{a^2b}{9}} \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{ab}}; \quad 5) \sqrt[3]{a^2\sqrt{a}} \cdot \sqrt[4]{\sqrt[3]{\frac{1}{a}}};$$

$$3) \frac{1}{a} \sqrt[3]{\frac{4a^2}{b}} \cdot \sqrt{\frac{ab}{2}}; \quad 6) \sqrt{x^3\sqrt{x^2}} : \sqrt[5]{x^4} \cdot \sqrt[4]{x}.$$

123°. Вычислите:

$$1) \sqrt[3]{1 - \sqrt{2}} \cdot \sqrt[6]{3 + 2\sqrt{2}}; \quad 2) \sqrt[10]{7 + 4\sqrt{3}} \cdot \sqrt[5]{\sqrt{3} - 2}.$$

Контрольные вопросы и задания

1. Докажите, что для арифметических корней верно равенство $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, где $a \geq 0, b > 0$.

2. Вычислите $\sqrt[4]{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt[6]{96}$.

3. Сравните $\sqrt[3]{23}$ и $2\sqrt{2}$.

8. Степень с рациональным показателем

Равенство $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ в случае, когда m делится на n (т. е. число $\frac{m}{n}$ — целое), позволяет заменить арифметический корень степенью: $\sqrt[3]{3^9} = 3^{\frac{9}{3}} = 3^3$, $\sqrt{5^8} = 5^{\frac{8}{2}} = 5^4$, $\sqrt[5]{2^{-10}} = 2^{\frac{-10}{5}} = 2^{-2}$ и т. п. Если же целое число m не делится на натуральное число n , то число $\frac{m}{n}$ является дробным.

Определим степень с *дробным* показателем с помощью равенства

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \quad a > 0.$$

Тогда по определению, например, $3^{\frac{7}{5}} = \sqrt[5]{3^7}$, $5^{-0.3} = 5^{\frac{-3}{10}} = \frac{1}{\sqrt[10]{5^3}}$ и т. п.

Таким образом, для любого рационального числа $\frac{m}{n}$, где m — целое, а n — натуральное число, неравное 1, при $a > 0$ получаем:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Рациональное число можно записать в виде дроби различными способами, например, $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9}$ и т. п. Покажем, что значе-

ние степени с рациональным показателем не зависит от того, какой из равных дробей представлен ее показатель, т. е., если

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q}, \text{ то } a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{p}{q}},$$

где m и p — целые, а n и q — натуральные числа.

Действительно, учитывая, что $mq = pn$, имеем:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{mq}} = \sqrt[n]{a^{pn}} = \sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}.$$

Примечание. В нашем доказательстве мы предполагали, что ни n , ни q не равны 1, поскольку показатель степени корня не равен 1. Если же все-таки, например, $n = 1$, т. е. $m = \frac{p}{q}$, то преобразова-

ния станут еще проще: $a^m = \sqrt{a^{mq}} = \sqrt{a^p} = a^{\frac{p}{q}}$.

Можно показать, что для степеней с рациональными показателями остаются справедливыми свойства, ранее установленные для степеней с целыми показателями:

$$a^x a^y = a^{x+y}; \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}; a^x b^x = (ab)^x; \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x; (a^x)^y = a^{xy}.$$

Докажем, например, что $(a^x)^y = a^{xy}$, где x и y — ра-

циональные числа. Пусть $x = \frac{m}{n}$ и $y = \frac{p}{q}$, тогда $(a^x)^y = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} =$

$$= \sqrt[q]{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p} = \sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p} = \sqrt[q]{a^{\frac{mp}{n}}} = a^{\frac{mp}{nq}} = a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}} = a^{xy}, \text{ что и требо-}$$

валось доказать.

В рамках принятого определения степени с дробным показателем такие выражения, как $(-2)^{\frac{1}{3}}$, $0^{2,5}$, $(-3)^{\frac{6}{18}}$, не имеют смысла.

▼ Попытка распространить определение степени с дробным показателем на отрицательные основания приводит к противоречиям. Попробуем, например, применить это определение

к выражению $(-3)^{\frac{6}{18}}$. $(-3)^{\frac{6}{18}} = \sqrt[18]{(-3)^6} = \sqrt[18]{3^6} = \sqrt[3]{3}$. В то же

время, $(-3)^{\frac{6}{18}} = (-3)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-3} = -\sqrt[3]{3}$. Получилось, что одно и то же выражение имеет два различных значения. Противоречия можно избежать, если договориться сокращать дробные показатели степени. $\triangle$

Поскольку $\sqrt[m]{0^m} = 0$ при любом натуральном m , естественно считать, что $0^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{0^m}$ и *доопределить* степень с дробным показателем для этого случая: $0^r = 0$ при любом *положительном рациональном* r .

Степени с рациональными показателями часто встречаются в тождественных преобразованиях выражений.

Пример 1. Найти значение выражения
$$\frac{a+b}{a - a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{2}{3}}}$$

при $a = 1,5$, $b = 40,5$.

Решение. Попробуемся упростить данное выражение. В знаменателе дроби каждый из членов содержит степень переменной a , поэтому естественно попытаться вынести общий множитель: $a - a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{3}} \left(a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}} \right)$. Поскольку $a^{\frac{2}{3}} = \left(a^{\frac{1}{3}} \right)^2$ и $b^{\frac{2}{3}} = \left(b^{\frac{1}{3}} \right)^2$, выражение $a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}$ является неполным квадратом двучлена $a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}$. При этом выражение $a + b$, стоящее в числителе дроби, можно рассматривать как сумму кубов:

$$a + b = \left(a^{\frac{1}{3}} \right)^3 + \left(b^{\frac{1}{3}} \right)^3 = \left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}} \right) \left(a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}} \right).$$

Теперь исходную дробь можно сократить:

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{a - a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{2}{3}}} &= \frac{\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}} \right) \left(a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}} \right)}{a^{\frac{1}{3}} \left(a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}} \right)} = \frac{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}} = \\ &= 1 + \frac{b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}} = 1 + \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

Пора подставить данные значения переменных:

$$1 + \left(\frac{40,5}{1,5}\right)^{\frac{1}{8}} - 1 + 27^{\frac{1}{8}} - 1 + 3 - 4.$$

Ответ. 4.

Примечание. В рассмотренном примере удалось устно найти степень числа. В тех случаях, когда это не удастся, на помощь приходит калькулятор. Так, на инженерном калькуляторе (рис. 50), который является одной из стандартных подпрограмм популярного компьютерного пакета «Windows»

(Пуск → Программы → Стандартные → Калькулятор → Вид → Инженерный),

для возведения в степень есть специальная клавиша. Чтобы найти, например, значение степени $3,7^{1,9}$ нужно:

1) ввести основание степени 3,7;

2) нажать клавишу x^y ;

3) ввести показатель степени 1,9;

4) нажать клавишу «=» на калькуляторе (или «Enter» на клавиатуре).

На дисплее калькулятора (рис. 50) появится приближенное значение степени, вычисленное с высокой точностью:

12,0111136337617598559088970536459.

Пример 2. Доказать, что при $0 < a < 125$ верно равенст-

$$\text{во } \left(\left(a^{\frac{1}{8}} + 5 \right)^2 - 20a^{\frac{1}{8}} \right)^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{8}} = 5.$$

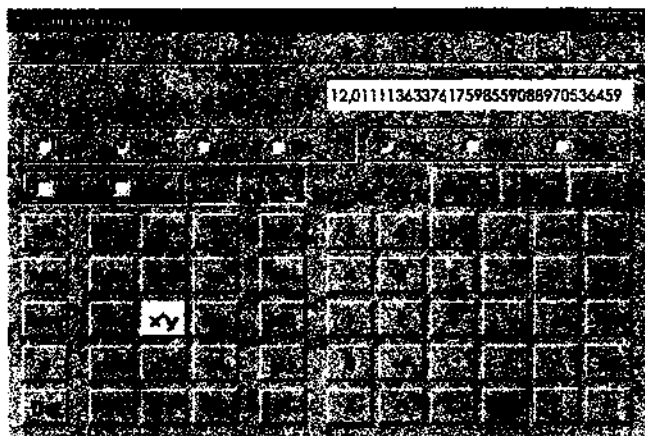


Рис. 50

Доказательство. Преобразуем левую часть данного равенства:

$$\begin{aligned} & \left(\left(a^{\frac{1}{3}} + 5 \right)^2 - 20a^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{3}} = \left(\left(a^{\frac{1}{3}} + 5 \right)^2 - 4 \cdot 5a^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{3}} = \\ & = \left(\left(a^{\frac{1}{3}} - 5 \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{3}} = \left| a^{\frac{1}{3}} - 5 \right| + a^{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

При $0 < a < 125$ разность $a^{\frac{1}{3}} - 5$ отрицательна, значит, модуль этой разности — число ей противоположное:

$$\left| a^{\frac{1}{3}} - 5 \right| + a^{\frac{1}{3}} = -\left(a^{\frac{1}{3}} - 5 \right) + a^{\frac{1}{3}} = 5,$$

что и требовалось доказать.

Упражнения

124. Докажите, что $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$, где $a > 0$, а x и y — рациональные числа.

125. Представьте в виде степени или произведения степеней с дробными показателями:

1) $\sqrt[3]{x}$; 5) $\sqrt[7]{a^2 b^3}$; 8) $\sqrt[6]{-y^5}$;

2) $\sqrt[4]{y}$; 6) $\sqrt[3]{bc^2}$; 9) $\sqrt[7]{\frac{a^5}{2b^4}}$;

3) $\sqrt[5]{a^3}$; 7) $\sqrt{-a^3}$; 10) $\sqrt[7]{\frac{3c^8}{x^5}}$.

4) $\sqrt[6]{b^5}$;

126. Представьте в виде корня или произведения корней:

1) $a^{\frac{2}{7}}$; 5) $c^{\frac{1}{3}}$; 9) $2^{\frac{3}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{3}}$;

2) $b^{\frac{5}{6}}$; 6) $b^{-1\frac{1}{2}}$; 10) $3^{-\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{2}{3}}$;

3) $x^{-\frac{3}{4}}$; 7) $a^{0,6} \cdot b^{-0,7}$; 11) $(a+b)^{\frac{1}{2}}$;

4) $a^{-0,5}$; 8) $x^{-0,8} \cdot y^{-0,9}$; 12) $(x+2y)^{\frac{2}{3}}$.

127. Представьте в виде степени:

- 1) $x^{\frac{1}{3}} x^{\frac{1}{4}} x^{\frac{1}{6}}$; 4) $b^{\frac{7}{10}} b^{-\frac{1}{5}} b^{-\frac{4}{15}}$; 7) $\left(b^{\frac{5}{7}}\right)^{0,7} \cdot b$;
 2) $y^{\frac{1}{4}} y^{\frac{1}{7}} y^{-\frac{1}{14}}$; 5) $\left(a^{\frac{1}{3}} a^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{1}{6}}\right)^3$; 8) $\left(c^{-0,3}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot c$.
 3) $c^{\frac{1}{6}} c^{-\frac{5}{9}} : c^{-\frac{3}{4}}$; 6) $\left(x^{\frac{1}{3}} x^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{5}{6}}\right)^{-3}$;

128. Вычислите:

- 1) $81^{\frac{3}{4}}$; 4) $0,0001^{-\frac{3}{4}}$; 7) $\frac{9^{3,5}}{27^{\frac{1}{2}}}$; 10) $\frac{3^{\frac{5}{6}} \cdot 2^{\frac{1}{6}}}{18^{\frac{5}{12}}}$.
 2) $125^{-\frac{2}{3}}$; 5) $\left(\frac{27}{64}\right)^{-\frac{2}{3}}$; 8) $\frac{8^{-1\frac{1}{3}}}{16^{-1,25}}$;
 3) $0,001^{-\frac{2}{3}}$; 6) $\left(5\frac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{4}}$; 9) $\frac{12^{\frac{5}{6}}}{2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}}}$;

129°. Представьте в виде степени с основанием:

- 1) 2; 2) $\sqrt{2}$; 3) 4; 4) 0,125; 5) $\sqrt[3]{4}$
 числа: а) 0,25; б) $\frac{1}{32}$; в) $\sqrt[5]{16}$; г) $\frac{1}{10\sqrt[5]{12}}$; д) $8\sqrt{2}$.

130°. Представьте в виде степени с основанием:

- 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\sqrt[3]{9}$; 3) 3; 4) $\frac{1}{27}$; 5) $\sqrt[5]{81}$
 числа: а) $\frac{1}{81}$; б) 81; в) $\sqrt[5]{9}$; г) $\frac{1}{7\sqrt[7]{243}}$; д) $27\sqrt{3}$.

131. Представьте выражение в виде квадрата:

- 1) a ; 3) $x^{\frac{2}{3}}$; 5) $4c$; 7) $64xy^{\frac{1}{2}}$;
 2) y^3 ; 4) $b^{-\frac{2}{5}}$; 6) $25a$; 8) $9b^{\frac{1}{3}}c$.

132. Представьте выражение в виде куба:

- 1) p ; 3) $a^{\frac{3}{4}}$; 5) $8z$; 7) $125ay^{\frac{1}{3}}$;
 2) a^2 ; 4) $b^{-\frac{3}{7}}$; 6) $27x$; 8) $1000b^{\frac{1}{2}}c$.

133. Раскройте скобки:

$$1) \left(a^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{4}} \right) \left(a^{\frac{1}{4}} + 1 \right);$$

$$2) \left(b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{6}} \right) \left(b^{\frac{1}{6}} - 1 \right);$$

$$3) \left(x - x^{\frac{1}{2}} \right) \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} \right);$$

$$4) \left(c^{\frac{1}{2}} + c^{-\frac{1}{3}} \right) \left(c^{\frac{1}{3}} - c^{-\frac{1}{2}} \right);$$

$$5) \left(a^{\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{3}} \right) \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{3}} \right);$$

$$6) \left(x^{\frac{1}{6}} + z^{\frac{1}{3}} \right) \left(z^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{6}} \right);$$

$$7) \left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{6}} \right) \left(a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}} \right);$$

$$8) \left(x^{\frac{2}{5}} - y^{\frac{1}{5}} \right) \left(x^{\frac{4}{5}} + x^{\frac{2}{5}} y^{\frac{1}{5}} + y^{\frac{2}{5}} \right);$$

$$9) \left(2a^{\frac{8}{4}} + 3b^{\frac{1}{2}} \right)^2.$$

134. Представьте выражение в виде разности квадратов и разложите на множители:

$$1) 10 - a; \quad 4) x^4 - y^3; \quad 7) 3x - y^{\frac{1}{4}}; \quad 10) 7b - a^{-2,4}.$$

$$2) b - 7; \quad 5) a^{\frac{1}{2}} - 9; \quad 8) p^{\frac{1}{5}} - 9q;$$

$$3) a^3 - 25; \quad 6) 25 - b^{\frac{1}{3}}; \quad 9) x^{1,4} - 28y;$$

135. Представьте выражение в виде суммы или разности кубов и разложите на множители:

$$1) 8 - a; \quad 3) 1000x - 3; \quad 5) a^{\frac{1}{2}} + 8; \quad 7) x^{\frac{1}{2}} - z^{\frac{1}{4}};$$

$$2) b + 27; \quad 4) 125 + 2y; \quad 6) 64 - b^{\frac{1}{3}}; \quad 8) b^{\frac{1}{6}} + 8c^{\frac{1}{2}}.$$

136. Сократите дробь на a :

$$1) \frac{a}{a - a^{\frac{1}{2}}}; \quad 2) \frac{a - a^{\frac{1}{2}}}{a - a^{\frac{1}{6}}}.$$

137. Упростите выражение:

$$1) \frac{a - a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}}{b - a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}};$$

$$5) \frac{a - 25}{a^{\frac{1}{2}} - 5};$$

$$2) \frac{x + x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}}{y + x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}}};$$

$$6) \frac{2y^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}}{x - 4y};$$

$$3) \frac{a + 2a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} + x}{ax^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}} x};$$

$$7) \circ \frac{a^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{4}} - 6} - \frac{3}{a^{\frac{1}{4}} + 6} + \frac{a^{\frac{1}{2}}}{36 - a^{\frac{1}{2}}};$$

$$4) \frac{3b^{\frac{1}{2}} - 3^{\frac{1}{2}} b}{b + 3 - 2 \cdot 3^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}};$$

$$8) \circ \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{6}} y^{\frac{1}{6}} + y^{\frac{1}{3}}} + \frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{6}} y^{\frac{1}{6}} - x^{\frac{1}{3}}} - \frac{x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{6}} y^{\frac{1}{6}}}.$$

138. Вычислите значение выражения, если нужно, упростив его:

$$1) \frac{7a^{\frac{4}{5}}}{a^{\frac{14}{5}} - 3a^{-\frac{1}{5}}} \text{ при } a = 2;$$

$$3) \frac{a}{a^{\frac{1}{3}} - 2} - \frac{2a + 16}{a^{\frac{1}{3}} + 2} \text{ при } a = 27;$$

$$2) \frac{a^{\frac{7}{3}} - a^{\frac{1}{3}}}{5a^{\frac{4}{3}}} \text{ при } a = 4;$$

$$4) \frac{y^2 - 8y^{\frac{1}{2}}}{y - 4} + \frac{8}{y^{\frac{1}{2}} + 2} \text{ при } y = 25;$$

$$5) \circ \frac{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{2}}} \text{ при } x = 12,8; y = 5;$$

$$6) \circ \frac{x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}} y + xy^{\frac{2}{3}}} - \frac{x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}} y - xy^{\frac{2}{3}}} \text{ при } x = 4; y = 0,5.$$

■ Проведите вычисления с помощью калькулятора без предварительного упрощения выражений.

139°. Замените корни степенями и упростите выражение:

$$1) \left(\frac{\sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{c^2} - \sqrt[3]{c} - 1} - \frac{3\sqrt[3]{c} - 1}{c + 1} \right) \cdot \frac{c + 1}{\sqrt[3]{c^2} - 1};$$

$$2) \frac{y - 1}{\sqrt[3]{y^2} - \sqrt[3]{y}} \cdot \left(\frac{y}{y - 1} + \frac{1}{\sqrt[3]{y} - 1} \right);$$

$$3) \sqrt[4]{b} \cdot \left(\frac{\sqrt[4]{b^3} + \sqrt[4]{x^3}}{\sqrt{b} + \sqrt{bx}} - \sqrt[4]{b} \right) - \frac{b - x}{\sqrt{b} - \sqrt{x}};$$

$$4) \left(\frac{49}{x - 27} - \frac{\sqrt[3]{x} - 3}{\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x} + 9} \right) \cdot \frac{\sqrt[3]{x^4} - 27\sqrt[3]{x}}{16 - \sqrt[3]{x^2}} - \frac{40 - \sqrt[3]{x^2}}{4 - \sqrt[3]{x}}.$$

140°. Решите уравнение:

$$1) (x + 9)^{\frac{1}{5}} - (x + 3)^{\frac{1}{2}} = 0; \quad 2) \frac{y}{y + 1} - 2\left(\frac{y + 1}{y}\right)^{0,5} = 3.$$

141°. Найдите все значения a , при которых не имеет корней уравнение:

$$1) x - 2ax^{\frac{1}{2}} - a + 2 = 0; \quad 2) x + 3(2 + x)^{0,5} + a = 0.$$

Контрольные вопросы и задания

1. Используя определение степени с рациональным показателем, докажите, что $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$, где $a > 0$, x и y — рациональные числа.

2. Запишите без знаков корней выражение $\frac{\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[6]{a^5} \cdot \sqrt{a}}$ и упростите его.

$$3. \text{Сократите дробь } \frac{x^{\frac{1}{2}} - 8}{x^{\frac{1}{3}} + 2x^{\frac{1}{6}} + 4}.$$



ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ

В этой главе снимется последнее ограничение на показатель степени — вы сможете использовать степени, показателями которых являются любые действительные числа. В пункте 9 вас ожидает также знакомство с новой функцией, аргументом которой является показатель степени числа, — показательной функцией. Свойства показательной функции будут использоваться в решении уравнений и неравенств. Проблема решения показательного уравнения $a^x = b$ в пункте 10 приведет к понятию логарифма, а в последнем пункте главы вы научитесь применять свойства логарифмов к решению различных задач.

9. Функция $y = a^x$

В предыдущей главе вы познакомились с понятием степени с рациональным показателем. Это позволяет нам рассматривать функции вида $y = a^x$, аргумент которых может принимать любые рациональные значения. Аргументом функции $y = a^x$ является показатель степени, поэтому такие функции получили название *показательных*. Основанием степени с рациональным показателем может быть только положительное число, но, говоря об основании показательной функции, следует ввести еще одно ограничение. Поскольку $1^x = 1$, функция $y = 1^x$ является не показательной, а линейной (напомним, что линейную функцию $y = 1$ называют константой). Таким образом, основанием a показательной функции $y = a^x$ может быть любое положительное число, отличное от 1.

Построим график функции $y = a^x$, например, при $a = 2$. Для этого, как обычно, найдем сначала координаты некоторых точек графика и заполним таблицу значений функции:

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} \approx 0,13; 2^{-2,5} = 2^{-3+0,5} = 2^{-3} \cdot 2^{0,5} \approx \frac{1}{8} \cdot 1,414 \approx 0,18;$$

$$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0,25; \dots; 2^{3,5} = 2^3 \cdot 2^{0,5} \approx 8 \cdot 1,414 \approx 11,31.$$

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5
$y = 2^x$	0,13	0,18	0,25	0,35	0,5	0,71	1	1,41	2	2,83	4	5,66	8	11,31

Отметим эти точки на координатной плоскости (рис. 51).

Составляя таблицу, мы вычисляли значения функции $y = 2^x$ для значений x , взятых с шагом 0,5. На рисунке 52, а и б изображены точки графика функции $y = 2^x$ для значений x , взятых соответственно с шагом 0,25 и 0,1.

Можно заметить, что с уменьшением шага точки все гуще располагаются на некоторой непрерывной кривой линии (рис. 52, в).

Все точки этой линии, абсциссы которых рациональны, являются точками графика функции $y = 2^x$. Но кроме них на ней имеется также бесконечное множество «лишних» точек, абсциссы которых иррациональны. Условимся считать, что и при любом иррациональном значении x ордината соответствующей точки нашей кривой равна 2^x .

Тогда полученная кривая будет являться графиком показательной функции $y = 2^x$, аргумент которой может принимать любые действительные (рациональные и иррациональные) значения.

Аналогичным образом, условимся считать, что при любом положительном a , отличном от 1, аргумент показательной функции $y = a^x$ может принимать любые действительные значения.

Примем без доказательства, что степени с действительными показате-

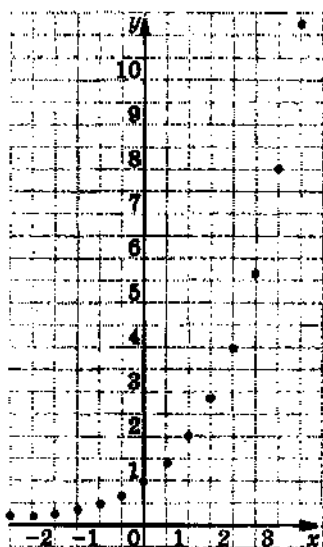
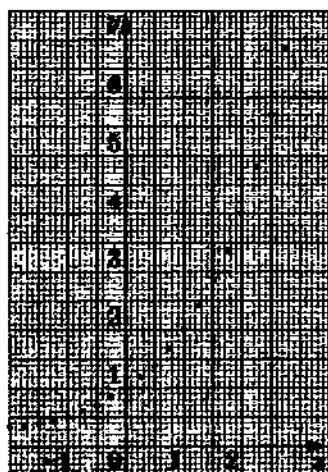
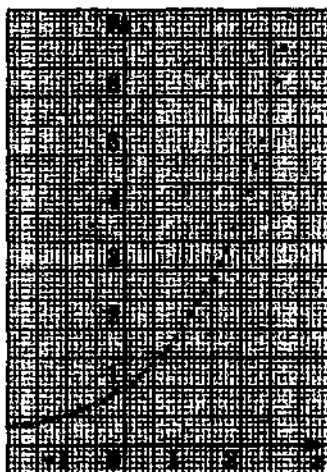


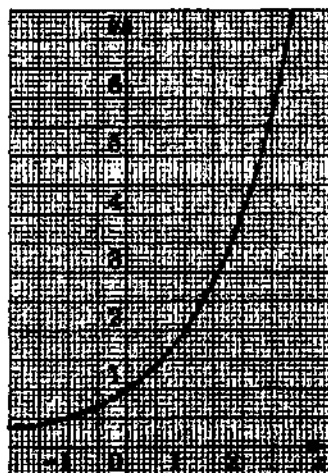
Рис. 51



а)



б)



в)

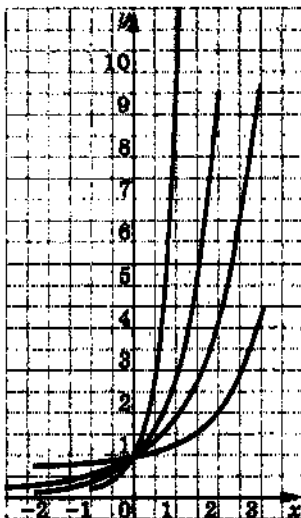


Рис. 53

Рис. 52

телями обладают такими же свойствами, что и степени с рациональными показателями:

$$a^x a^y = a^{x+y}; \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}; a^x b^x = (ab)^x; \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x; (a^x)^y = a^{xy}.$$

На рисунке 53 в одной системе координат изображены графики нескольких показательных функций с основаниями, боль-

шими 1. Рассматривая эти графики, мы можем отметить несколько свойств, общих для всех функций вида $y = a^x$ при $a > 1$.

Свойства функций $y = a^x$, $a > 1$

1. Функция определена и непрерывна на множестве всех действительных чисел.

2. Область значений функции — множество всех положительных чисел.

3. Функция является возрастающей.

4. При $x = 0$ значение функции равно 1, т. е. график проходит через точку $(0; 1)$.

5. Ось абсцисс — горизонтальная асимптота графика функции $y = a^x$.

Из этих свойств следует, что при $x > 0$ значения функции больше 1, а при $x < 0$ значения функции заключены между 0 и 1.

Для построения графика функции $y = a^x$ при $0 < a < 1$ можно, конечно, снова составить таблицу значений, но лучше поступить иначе. Пусть, например, нужно построить график функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Поскольку $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$, график функции

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ мы можем получить из графика функции $y = 2^x$ с помощью симметрии относительно оси ординат (рис. 54).

Рассматривая функции $y = a^x$ при $a > 1$ и при $0 < a < 1$, мы видим, что различие в их свойствах относится только к свойству 3 — характеру монотонности: при $a > 1$ показательная функция возрастает, при $0 < a < 1$ убывает.

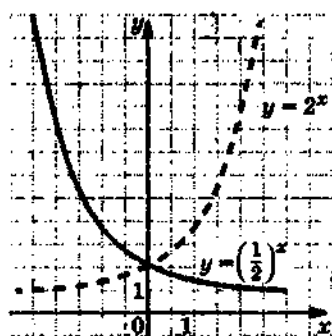


Рис. 54

Свойство монотонности часто применяется при решении показательных уравнений и неравенств.

Пример 1. Решить уравнение $9^x - 8 \cdot 3^x = 9$.

Решение. Введем вспомогательную переменную t : $t = 3^x$, тогда $9^x = (3^2)^x = (3^x)^2 = t^2$. Поскольку переменная t может принимать только положительные значения, задача сводится к нахождению положительного корня уравнения $t^2 - 8t - 9 = 0$.

Корни этого квадратного уравнения $t_1 = -1$, $t_2 = 9$, значит, искомый корень 9.

Возвращаясь к переменной x , получим $3^x = 9$, $3^x = 3^2$. В силу монотонности свое значение 3^2 функция $y = 3^x$ принимает единственный раз при $x = 2$.

О т в е т. 2.

П р и м е р 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 9^{x+1} = 3^{3y+2}, \\ 4x^2 - 2x = y + 13. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Перепишем первое уравнение системы $9^{x+1} = 3^{3y+2}$ как равенство степеней с одинаковыми основаниями: $3^{2x+2} = 3^{3y+2}$. Поскольку каждое свое значение показательная функция принимает по одному разу, из равенства значений показательной функции следует равенство значений ее аргумента: $2x + 2 = 3y + 2$, $2x = 3y$.

Подставляя $3y$ вместо $2x$ во второе уравнение системы, получим:

$$(3y)^2 - 3y = y + 13, 9y^2 - 4y - 13 = 0, y_1 = -1, y_2 = \frac{13}{9}.$$

Найдем соответствующие значения x из равенства $2x = 3y$:

$$x_1 = -\frac{3}{2}, x_2 = \frac{13}{6}.$$

$$\text{О т в е т. } x_1 = -\frac{3}{2}, y_1 = -1; x_2 = \frac{13}{6}, y_2 = \frac{13}{9}.$$

П р и м е р 3. Найти область определения функции

$$y = \sqrt[4]{0,25^{x-1} - 9 \cdot 0,5^x + 2}.$$

Р е ш е н и е. Выражение, стоящее под знаком корня четной степени, должно быть неотрицательно:

$$0,25^{x-1} - 9 \cdot 0,5^x + 2 \geq 0.$$

Введем вспомогательную переменную t : $t = 0,5^x$ и найдем положительные решения неравенства $0,25^{-1} \cdot t^2 - 9t + 2 \geq 0$:

$$\begin{cases} 4t^2 - 9t + 2 \geq 0, \\ t < \frac{1}{4} \text{ или } t > 2, \\ t > 0, \end{cases}$$



$$0 < t \leq \frac{1}{4} \text{ или } t \geq 2 \text{ (рис. 55).}$$

Рис. 55

Вернемся к переменной x . $0 < 0,5^x \leq \frac{1}{4}$ или $0,5^x \geq 2$. Поскольку $0 < 0,5^x$ при всех значениях x , имеем: $0,5^x \leq 0,5^2$ или $0,5^x \geq 0,5^{-1}$.

Показательная функция с основанием 0,5 является убывающей, поэтому большему ее значению соответствует меньшее значение аргумента, значит: $x \geq 2$ или $x \leq -1$.

О т в е т. $D(y) = (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$.

П р и м е ч а н и е. При переходе от неравенств со степенями к неравенствам с их показателями мы, в силу убывания показательной функции с основанием, меньшим 1, изменили знаки неравенств. Понятно, что если бы мы имели дело с возрастающей функцией, знак неравенства следовало бы сохранить, например: $3^x < 3^2$, $x < 2$.

С показательной функцией, определенной на множестве натуральных чисел, вы встречались в курсе алгебры 9 класса в теме прогрессии. Действительно, формула n -го члена геометрической прогрессии $b_n = b_1 q^{n-1}$ при $b_1 = q$ задает показательную функцию

$$b_n = b(n) = q^n.$$

Показательная функция $y = a^x$ обладает важным свойством: при увеличении аргумента на 1 она изменяет свое значение в a раз: $a^{x+1} = a \cdot a^x$.

Такие зависимости довольно широко распространены в окружающем нас мире. Приведем три примера из биологии, физики и экономики, приводящих к показательной функции.

Биология. В питательной среде бактерия кишечной палочки делится каждые 20 минут. Понятно, что общее число бактерий за каждый час увеличивается в 8 раз. Если в начале процесса была одна бактерия, то через x часов их число (N) станет равным 8^x :

$$N(x) = 8^x.$$

Физика. Время, за которое распадается половина массы радиоактивного вещества, называют его периодом полураспада. У цезия-135, являющегося основным фактором радиоактивного заражения местности после Чернобыльской катастро-

фы, период полураспада 31 год. Значит, от начальной массы

m_0 цезия через x лет останется $m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{31}}$:

$$m(x) = m_0 \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{31}}\right)^x.$$

Экономика. Если ежемесячно на банковский вклад, равный s_0 рублей, начисляется $p\%$, то через x месяцев вклад s станет равным $s_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^x$:

$$s(x) = s_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^x.$$

Найдем, например, на сколько процентов возрастет банковский вклад за год, если ежемесячно банк начисляет на него 2%. Для этого:

1. Сначала найдем, каким станет вклад через 12 месяцев:

$$s(12) = s_0 \cdot (1 + 0,02)^{12} = s_0 \cdot 1,02^{12} \approx 1,27s_0.$$

2. Выясним, на сколько вырос вклад за год:

$$s(12) - s_0 = 1,27s_0 - s_0 = 0,27s_0.$$

3. Определим, сколько процентов от начального вклада составляет этот прирост:

$$\frac{s(12) - s_0}{s_0} \cdot 100\% = \frac{0,27s_0}{s_0} \cdot 100\% = 27\%.$$

Упражнения

142. С помощью графика функции $y = 2^x$ (см. рис. 52, в) найдите:

1) значение функции, если:

а) $x = 0,8$; б) $x = 1,7$; в) $x = 2,4$; г) $x = -0,4$; д) $x = -0,6$;

е) $x = \sqrt{2}$; ж) $x = \sqrt{3}$;

2) значения аргумента, если:

а) $y = 0,6$; б) $y = 1,5$; в) $y = 2$; г) $y = 3,5$; д) $y = 6$.

143. Принадлежат ли графику функции $y = 2^x$ точки:

1) $A(5; 32)$;

3) $C(4,5; 16\sqrt{2})$;

2) $B(-3; 0,125)$;

4) $D(-1,5; \frac{\sqrt{2}}{4})$?

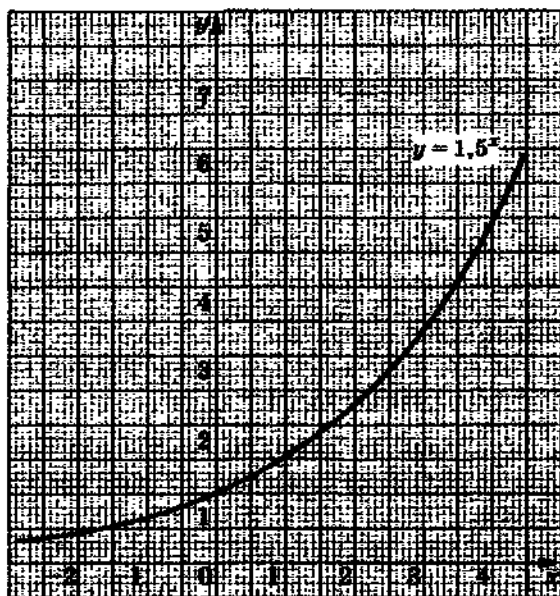


Рис. 56

144. Используя график функции $y = 1,5^x$ (рис. 56), найдите приближенные решения уравнения и неравенства:

- | | | |
|-------------------|----------------------|--------------------------------|
| 1) $1,5^x = 3$; | 5) $1,5^x = 0,3$; | 8) $\frac{1}{2} < 1,5^x < 4$; |
| 2) $1,5^x > 7$; | 6) $1 < 1,5^x < 6$; | 9) $2 < 1,5^x < 7$; |
| 3) $1,5^x = 11$; | 7) $1,5^x = 0,8$; | 10) $3 < 1,5^x < 4$. |
| 4) $1,5^x < 3$; | | |

145. Сравните значения выражений:

- | | | |
|------------------------------|-------------------------------------|---|
| 1) 2^{-7} и $2^{-5,3}$; | 4) $0,3^0$ и $0,3^{0,1}$; | 7) $0,2^{\sqrt{3}}$ и $0,2^{\sqrt{2}}$; |
| 2) $4^{-1,4}$ и $4^{0,03}$; | 5) $1,1^{\sqrt{3}}$ и $1,1^{1,7}$; | 8) $17^{\sqrt[4]{4}}$ и $17^{\sqrt{2}}$. |
| 3) 5^0 и $5^{-0,1}$; | 6) $2^{-\sqrt{5}}$ и $2^{-2,5}$; | |

146. Решите уравнение, представляя его правую часть в виде степени с тем же основанием, что и степень в левой части:

- | | | |
|-------------------|---|---|
| 1) $2^x = 16$; | 4) $5^x = \frac{1}{125}$; | 7) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{\sqrt[4]{2}}{8}$; |
| 2) $5^x = 625$; | 5) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \sqrt[3]{9}$; | 8) $2^x = \frac{4}{\sqrt[5]{16}}$. |
| 3) $2^x = 0,25$; | 6) $0,2^x = \frac{1}{\sqrt[4]{125}}$; | |

147. Определите a , если известно, что график функции $y = a^x$ проходит через точку: 1) $M(0,5; 3)$; 2) $K(2; 5)$.

148°. График функции $y = a^x$ проходит через точку $A(4; 25)$. Проходит ли этот график через точку: 1) $B(-6; 0,008)$; 2) $C(6; 125)$?

149°. На рисунке 53 изображены графики функций вида $y = a^x$. Определите a для каждой из них.

150°. Постройте график функции:

1) $y = 3^{|x|}$; 2) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}$; 3) $y = 1,5^{|x+1|}$; 4) $y = \left(\frac{2}{3}\right)^{|x|-1}$.

Укажите область значений функции, ее промежутки возрастания и убывания, наибольшее или наименьшее значение.

151°. Упростите выражение:

1) $\frac{a^2\sqrt{3} - b^2\sqrt{5}}{(a\sqrt{3} - b\sqrt{5})^2} - 1$; 2) $\frac{a^{\frac{2\sqrt{3}}{3}} - a^{\frac{\sqrt{3}}{3}} b^{\frac{\sqrt{5}}{3}} + b^{\frac{2\sqrt{5}}{3}}}{a\sqrt{3} + b\sqrt{5}}$.

152°. Не решая уравнения $4^x + 4^{-x} = 19$, найдите значение выражения $2^x + 2^{-x}$.

153. Выясните, является ли функция: 1) $y = 2^x + 2^{-x}$; 2) $y = 2^x - 2^{-x}$ четной, нечетной, или она не является ни четной, ни нечетной.

154°. Докажите, что при любом значении x верно неравенство $2^x + 2^{-x} > 2$.

155. Решите уравнение:

1) $\left(\frac{1}{64}\right)^x = \sqrt{\frac{1}{8}}$; 5) $5^x - \sqrt{3x-5} = 125$;
2) $8^x = 128\sqrt{2}$; 6) $10^x - \sqrt{x^2+5x+1} = 1000$;
3) $(2,5)^{2x-3} = 15\frac{5}{8}$; 7) $9^{2\sqrt{x}} = 3^{2x-6}$;
4) $0,125 \cdot 4^{2x+3} = \frac{0,25}{\sqrt{2}}$; 8) $\left(\frac{3}{2}\right)^{2-2x} - \left(\frac{8}{27}\right)^{x-2} = 0$.

156. Решите уравнение:

1) $7^{x+2} - 14 \cdot 7^x = 5$;

2) $3^{x+1} - 5 \cdot 3^{x-1} = 36$;

3) $5^{x+2} - 4 \cdot 5^{x+1} + 4 \cdot 5^{x-1} = 29$;

4) $5 \cdot 2^x - 7 \cdot 2^{x-1} + 9 \cdot 2^{x-2} = 60$;

5) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-3} - 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} + 11 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x = 6$;

6) $0,2^{x-3} - 3 \cdot 0,2^{x-2} - 6 \cdot 0,2^{x-1} = 500$;

7) $9^x - 2^{x+0,5} = 2^{x+3,5} - 3^{2x-1}$;

8) $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$.

157. Решите уравнение:

1) $4^x - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$; 4) $2^x - 13 \cdot 2^{\frac{x-2}{2}} - 12 = 0$;

2) $\left(\frac{1}{9}\right)^x - 8\left(\frac{1}{3}\right)^x - 9 = 0$; 5) $5 \cdot 5^x - 3 \cdot 5^{-x} = 2$;

3) $3 \cdot 2^x - 7 \cdot 2^{\frac{x}{2}} - 20 = 0$; 6) $5^{x+1} + 5^{1-x} = 26$.

158. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} 27^{x-2y} = \frac{1}{3^{2x+y}}, \\ 3x - 5y = 4; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3^x - 2^{2y} = 17, \\ 3^{\frac{x}{2}} + 2^y = 17; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 25^{x+y} = \frac{1}{\sqrt{5^{x-y}}}, \\ 3x - 2y = 6; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} u - (\sqrt{5})^v = v - (\sqrt{5})^u, \\ u + v^2 = 12. \end{cases}$

159. Решите неравенство:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 16$; 6) $\frac{3^x - 81}{5 + 4x - x^2} \geq 0$;

2) $\sqrt{3^x} < 27$; 7) $2^x < 5 - \frac{x}{2}$;

3) $(3 - \sqrt{3})^x > 1$; 8) $3^x \geq \frac{3}{x}$;

4) $(\sqrt{15} - 3)^x \leq 1$; 9) $3^x + 5^x > 8^x$;

5) $\frac{2^x - 0,5}{3 + x} > 0$; 10) $3^x + 4^x < 5^x$.

160°. Найдите область определения функции:

1) $\sqrt{9^x - 28 \cdot 3^x + 27}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{0,5^x - \frac{4}{0,5^x} - 3}}$.

161°. Найдите все значения a , при которых уравнение $4^x - a \cdot 2^x + a - 1 = 0$:

1) имеет два корня; 2) не имеет корней; 3) имеет единственный корень.

162°. Процент инфляции показывает, на сколько процентов (в среднем) выросли цены.

1) Выразите процент инфляции за x месяцев, если ежемесячная инфляция составляла 3%.

2) ■ Вычислите с помощью калькулятора годовой процент инфляции.

Контрольные вопросы и задания

1. Любое ли положительное число можно представить в виде степени с основанием 2 и рациональным показателем?

2. Между какими последовательными натуральными числами заключено число $2\sqrt{2}$?

3. Сравните значения выражений π^π и $\pi^{\frac{10}{3}}$.

4. Решите неравенство $0,25^x - 4 \cdot 0,5^x < 0$.

10. Понятие логарифма

При решении показательных уравнений в предыдущем пункте удавалось представить обе части уравнения в виде степеней с одинаковыми основаниями и рациональными показателями.

Так, например, при решении уравнения $2^x = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{2}{5}}$ мы

заменим $\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{2}{5}}$ степенью $2^{-\frac{6}{5}}$ и из равенства степеней с одина-

ковыми основаниями $2^x = 2^{-\frac{6}{5}}$ делаем вывод о равенстве пока-

зателей: $x = -\frac{6}{5}$. Однако, чтобы решить, казалось бы, более простое уравнение $2^x = 3$ имеющихся у вас знаний оказывается недостаточно. Дело в том, что число 3 нельзя представить в виде степени с основанием 2 и рациональным показателем.

▼ Действительно, если бы равенство $2^{\frac{m}{n}} = 3$, где m и n — натуральные числа, было верным, то, возведя его в степень n , мы должны были бы получить верное равенство $2^m = 3^n$. Но последнее равенство неверно, так как левая его часть является четным числом, а правая — нечетным. Значит, не может быть верным и равенство $2^{\frac{m}{n}} = 3$. Δ

С другой стороны, график непрерывной функции $y = 2^x$ пересекается с прямой $y = 3$ (рис. 57), и, значит, уравнение $2^x = 3$ имеет корень.

Таким образом, перед нами стоят два вопроса: «Как записать этот корень?» и «Как его вычислить?». Ко второму вопросу мы вернемся в следующем пункте, а ответ на первый вопрос сформулируем в виде определения:

Показатель степени, в которую нужно возвести число a ($a > 0$, $a \neq 1$), чтобы получить число b , называется логарифмом b по основанию a и обозначается $\log_a b$.

Теперь мы можем записать корень уравнения $2^x = 3$:
 $x = \log_2 3$.

Равенства $a^x = b$ и $x = \log_a b$, в которых число a положительно и не равно единице, число b положительно, а число x может быть любым, выражают одно и то же соотношение между числами a , b и x . Подставив в первое равенство выражение x из второго, получим основное логарифмическое тождество:

$$a^{\log_a b} = b.$$

Выразим x из равенства $y = \log_a x$, получим $x = a^y$. Последнее равенство задает функцию $x = a^y$, график которой симметричен графику

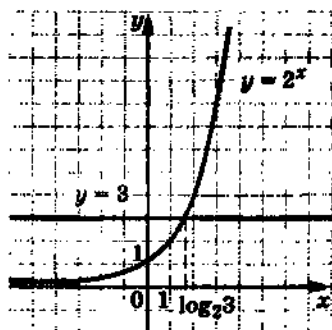


Рис. 57

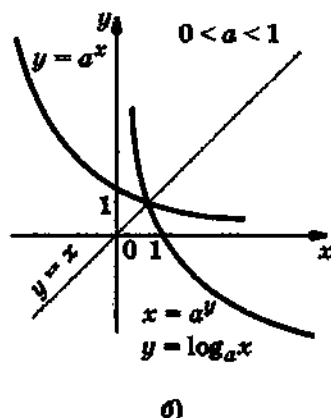
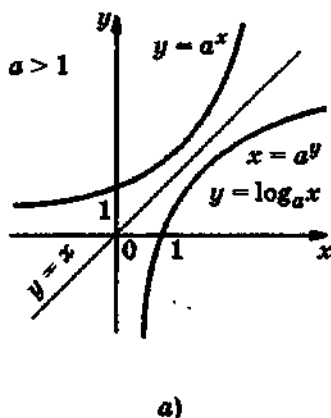


Рис. 58

показательной функции $y = a^x$ относительно прямой $y = x$ (рис. 58, а, б).

Показательная функция $x = a^y$ является монотонной, и, значит, разные значения y соответствуют разным значениям x , но это говорит о том, что $y = \log_a x$, в свою очередь, является функцией x .

Показательная функция $y = a^x$ и логарифмическая функция $y = \log_a x$ являются взаимно обратными. Сравнивая их графики, можно отметить некоторые основные свойства логарифмической функции.

Свойства функции $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$

1. Функция $y = \log_a x$ непрерывна и определена на множестве положительных чисел.
2. Область значений функции $y = \log_a x$ — множество действительных чисел.
3. При $0 < a < 1$ функция $y = \log_a x$ является убывающей; при $a > 1$ функция $y = \log_a x$ является возрастающей.
4. График функции $y = \log_a x$ проходит через точку $(1; 0)$.
5. Ось ординат — вертикальная асимптота графика функции $y = \log_a x$.

Рассмотрим несколько примеров, в которых используются свойства логарифмической функции.

Пример 1. Решить уравнение $\log_2 (2^x - 7) = 3 - x$.

Решение 1. По определению логарифма имеем:

$$2^{3-x} = 2^x - 7.$$

Далее: $2^x - \frac{8}{2^x} - 7 = 0$. Поскольку $2^x \neq 0$, получаем:

$$(2^x)^2 - 7 \cdot 2^x - 8 = 0.$$

Будем рассматривать полученное уравнение как квадратное относительно 2^x и найдем его положительный корень ($2^x > 0$): $2^x = 8$. Далее имеем: $2^x = 2^3$, $x = 3$.

Ответ. 3.

Решение 2. Левая часть уравнения задает возрастающую функцию $y = \log_2 (2^x - 7)$. Действительно, при увеличении значения x , соответственно, увеличиваются значения 2^x , $2^x - 7$ и $\log_2 (2^x - 7)$. Правая же часть уравнения задает убывающую функцию $y = 3 - x$. Значит, данное уравнение либо не имеет корней, либо имеет единственный корень. Нетрудно подобрать корень данного уравнения — число 3.

Пример 2. Решить неравенство $\log_{x+2} (5 - x) > 1$.

Решение. Найдем множество значений переменной x , при которых все входящие в данное неравенство выражения имеют смысл — область допустимых значений переменной неравенства (обычно используется сокращение ОДЗ). Одновременно должны выполняться следующие условия: основание логарифма и выражение, стоящее под знаком логарифма, положительны, а основание логарифма, кроме того, отличается от 1. Следовательно, ОДЗ состоит из решений системы

$$\begin{cases} 5 - x > 0, \\ x + 2 > 0, \\ x + 2 \neq 1; \end{cases} \begin{cases} x < 5, \\ x > -2, \\ x \neq -1. \end{cases} \quad \text{ОДЗ} = (-2; -1) \cup (-1; 5).$$

Для любого значения x из ОДЗ правую часть данного неравенства можно представить в виде логарифма с основанием $x + 2$:
 $\log_{x+2} (5 - x) > \log_{x+2} (x + 2).$

Основание $x + 2$ логарифмов может быть как больше, так и меньше 1. В первом случае большему логарифму соответствует большее значение стоящего под его знаком выражения,

а во втором — меньшее. Следовательно, чтобы перейти от неравенства логарифмов к неравенству выражений, стоящих под их знаками, нужно рассмотреть два случая:

1) основание логарифма больше 1 (знак неравенства не изменяется);

2) основание логарифма меньше 1 (знак неравенства меняется на противоположный):

$$1) \begin{cases} x+2 > 1, \\ 5-x > x+2; \end{cases} \begin{cases} x > -1, \\ 2x < 3; \end{cases} -1 < x < 1,5.$$

Найденные значения x входят в ОДЗ и, соответственно, в множество решений неравенства;

$$2) \begin{cases} x+2 < 1, \\ 5-x < x+2; \end{cases} \begin{cases} x < -1, \\ x > 1,5; \end{cases}$$

нет решений.

О т в е т. $-1 < x < 1,5$.

П р и м е р 3. Решить неравенство

$$\log_3 \log_{0,5} (2x+1) > 1.$$

Р е ш е н и е. Запишем обе части неравенства в виде логарифмов с одинаковым основанием 3:

$$\log_3 \log_{0,5} (2x+1) > 1, \log_3 \log_{0,5} (2x+1) > \log_3 3.$$

Логарифмическая функция с основанием 3 возрастает, значит, $\log_{0,5} (2x+1) > 3$. Понятно, что в этом случае значения выражения $\log_{0,5} (2x+1)$, стоящего под знаком внешнего логарифма, положительны. Запишем обе части неравенства в виде логарифмов с одинаковым основанием 0,5:

$$\log_{0,5} (2x+1) > \log_{0,5} 0,5^3.$$

Логарифмическая функция с основанием 0,5 убывает; учитывая, что под знаком логарифма должно быть положительное число, имеем:

$$\begin{cases} 2x+1 < 0,5^3, \\ 2x+1 > 0; \end{cases} \quad 0 < 2x+1 < \frac{1}{8},$$

$$-1 < 2x < -\frac{7}{8}, \quad -\frac{1}{2} < x < -\frac{7}{16}.$$

$$\text{О т в е т. } -\frac{1}{2} < x < -\frac{7}{16}.$$

П р и м е ч а н и е. Освобождаясь от внешнего логарифма, имеющего основание 3, мы сослались на возрастание соответствующей логарифмической функции, т. е. на то, что большему значению логарифма соответствует большее значение выражения, стоящего под его знаком. Однако следует иметь ввиду, что если функцию $y = \log_3 \log_{0,5} (2x + 1)$ считать логарифмической, то ее аргумент не переменная x , а все выражение $\log_{0,5} (2x + 1)$. Если же все-таки рассматривать x как аргумент функции $y = \log_3 \log_{0,5} (2x + 1)$, то эта функция окажется убывающей, так как при увеличении значения x увеличивается значение выражения $2x + 1$, уменьшается значение выражения $\log_{0,5} (2x + 1)$ и, соответственно, уменьшается значение самой функции.

Упражнения

163. Пользуясь определением логарифма, найдите:

1) а) $\log_2 4$;

2) а) $\log_5 25$;

б) $\log_3 81$;

б) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27}$;

в) $\log_{0,5} 0,125$;

в) $\log_4 64$;

г) $\log_3 \frac{1}{27}$;

г) $\log_{0,25} 16$;

д) $\log_{0,5} 8$;

д) $\log_3 \frac{1}{81}$;

е) $\log_4 \sqrt{2}$;

е) $\log_{27} \sqrt{3}$;

ж) $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{27}$;

ж) $\log_{\frac{1}{2}} 0,125$.

164. Запишите в виде логарифма с основанием:

1) 2;

2) $\frac{1}{2}$;

3) $\frac{2}{3}$;

4) 4;

5) $\frac{1}{27}$;

6) $x + 1$

числа: а) 1; б) 2; в) 3; г) 0; д) -1; е) -2; ж) -3; з) 0,5; и) $\frac{1}{3}$;

к) -0,5; л) $\frac{2}{3}$.

165. Решите уравнение:

1) $\log_x 32 = 5$;

3) $\log_x \sqrt{5} = 3$;

2) $\log_x 27 = -3$;

4) $\log_x \sqrt[3]{49} = -2$.

166. Решите уравнение¹:

- 1) $\log_2 (x + 3) = 2$; 3) $\log_{\sqrt{3}} (x^2 - 3x - 7) = 2$;
2) $\log_{0,6} (x - 5) = -2$; 4) $\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} (x^2 + 5x + 2) = -6$;
5) $\log_{\frac{2}{3}} (x + 1) - \log_3 (x + 1) - 2 = 0$;
6) $\log_{0,5}^2 (2x - 1) + 3 \log_{0,5} (2x - 1) + 2 = 0$.

167. Решите уравнение, пользуясь определением логарифма:

- 1) $2^x = 5$; 3) $5^{x+1} = 2$;
2) $0,5^x = 7$; 4) $\left(\frac{1}{7}\right)^x = 3$.

168. Решите неравенство:

- 1) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 3$; 3) $(3 - \sqrt{3})^x > 6$;
2) $\sqrt{3}^x < 16$; 4) $(\sqrt{15} - 3)^x < 6$.

169. В одной системе координат постройте графики функций:

1) $y = \log_2 x$ и $y = \log_3 x$. Используя графики, сравните числа:

- а) $\log_2 5$ и $\log_3 5$; в) $\log_2 (5 - \sqrt{17})$ и $\log_3 (5 - \sqrt{17})$;
б) $\log_2 0,9$ и $\log_3 0,9$;

2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ и $y = \log_{\frac{1}{3}} x$. Используя графики, сравните числа:

- а) $\log_{\frac{1}{2}} 4$ и $\log_{\frac{1}{3}} 4$; в) $\log_{\frac{1}{2}} (\sqrt{17} - 4)$ и $\log_{\frac{1}{3}} (\sqrt{17} - 4)$.
б) $\log_{\frac{1}{2}} 0,8$ и $\log_{\frac{1}{3}} 0,8$;

170. 1) В одной системе координат изобразите схематически графики функций $y = a^x$ и $y = b^x$:

а) при $a > b > 1$; б) при $0 < b < a < 1$.

2) В этой же системе постройте графики обратных им функций $y = \log_a x$ и $y = \log_b x$.

3) Используя графики, решите неравенство $\log_a x < \log_b x$.

4) ^{*} Сформулируйте правило сравнения логарифмов одного и того же числа.

¹ $\log_a^2 b = (\log_a b)^2$.

171[•]. Сравните:

1) $\log_7 \frac{6}{7}$, $\log_8 \frac{7}{8}$ и $\log_8 \frac{6}{7}$; 2) $\log_7 \frac{8}{7}$, $\log_8 \frac{9}{8}$ и $\log_8 \frac{8}{7}$.

172. Найдите область определения выражения:

1) $\log_5 (7x^2 + 10x + 3)$; 5) $\log_{x+2} (7x^2 + 10x + 3)$;
2) $\log_5 (7 + 10x - 17x^2)$; 6) $\log_{4x+3} (7 + 10x - 17x^2)$;
3) $\log_{3-2x} (2x + 3)$; 7) $\log_{3x-2} \frac{2x-1}{3-x}$;
4) $\log_{3-2x} (7 - 3x)$; 8) $\log_{2-\frac{x}{8}} \frac{3x-1}{4-x}$.

173. Решите уравнение:

1) $2^{x+1} - 3 \cdot 2^x + 5 \cdot 2^{x-1} = 15$;
2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3} - 2 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{x-1} - 4 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^x = 10$;
3) $25^x - 8 \cdot 5^x + 15 = 0$;
4) $2^x + 10 \cdot 2^{-x} - 7 = 0$;
5) $4^x - 6^{x+1} + 5 \cdot 9^x = 0$;
6) $\left(\frac{2}{3}\right)^x - 7 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x + 6 = 0$;
7) $2 \cdot (0,1)^x + 10^{x+1} - 21 = 0$.

174[•]. Решите уравнение:

1) $\log_3 (3^x - 8) = 2 - x$; 2) $\log_4 (4^{-x} + 8) = x + 1$.

175[•]. Найдите все значения a , при которых уравнение $\log_2 (4^x - a) - x = 0$ имеет: 1) единственный корень; 2) два корня.

176. Решите неравенство:

1) $\log_5 (x + 2) > 2$; 5) $\log_{\frac{1}{16}} (x^2 - 3x + 4) < 1,5$;
2) $\log_{0,5} (x - 2) < -2$; 6) $\log_{\sqrt{2}} (x^2 - 5x - 6) > 6$;
3) $\log_{\sqrt{3}} (x + 2) < 4$; 7) $\log_{x-5} (x + 2) > 1$;
4) $\log_{\frac{1}{\sqrt{0,1}}} (1 - x) > 6$; 8) $\log_{x+1} (x - 2) < -1$.

177. Выполняя эскизы графиков функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, решите:

1) уравнение $f(x) = g(x)$; 2) неравенство $f(x) < g(x)$, где:

а) $f(x) = \log_2 x$, $g(x) = 5 - x^2$; б) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$, $g(x) = \sqrt{x-2} - 2$.

178. Решите неравенство, используя метод интервалов:

1) $\frac{\log_5 x - 2}{2 - \log_6 x} > 0$;

4) $\frac{7x^2 - 10x + 3}{\log_{0,9} x - 2} < 0$;

2) $\frac{\log_{0,5} x + 2}{2 - \log_3 x} < 0$;

5) $\frac{x^2 - 9x - 10}{\log_{0,9}(x^2 - 9)} > 0$;

3) $\frac{\log_{0,4} x - 2}{3x^2 - 10x + 7} > 0$;

6) $\frac{\log_5(9 - x^2)}{x^2 - 3x - 4} < 0$.

179⁰. Решите неравенство:

1) $\log_{x-3}(7-x) > 0$;

7) $\log_{x-3}(7-x) > 1$;

2) $\log_{7-x}(x-3) > 0$;

8) $\log_{x-2}(x+10) < 2$;

3) $\log_{\frac{x^2-1}{3}}(x+4) > 0$;

9) $\log_{2x}(x^2 - 5x + 6) < 1$;

4) $\log_{x+4} \frac{x^2-1}{3} < 0$;

10) $\log_{x-1}(x^2 - 6x + 9) < 1$;

5) $\log_{x^2+3x-4}(x+4) > 0$;

11) $\log_{x^2-6x+9}(x-1) \leq 1$.

6) $\log_{x+4}(x^2 + 3x - 4) < 0$;

180⁰. Решите неравенство:

1) $\log_2 \log_{\frac{1}{3}}(x-1) > 0$;

4) $\log_{\frac{1}{3}} \log_2(2x-1) < -1$;

2) $\log_{0,6} \log_{0,5}(x+1) > 0$;

5) $\log_3 \log_{0,2} \log_{32} \frac{x-1}{x+5} > 0$.

3) $\log_{0,2} \log_2(2x+3) < -1$;

Контрольные вопросы и задания

1. Запишите соотношение $a^c = b$ между числами a , b и c с помощью логарифма с основанием a .

2. Почему число 1 не рассматривается в качестве основания логарифма?

3. В чем отличие свойств логарифмических функций с основаниями большими 1 и меньшими 1?

4. Решите: 1) уравнение $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 6) = -1$;

2) неравенство $\frac{\log_3 x - 2}{5x + 1} < 0$.

5. Какие два случая надо рассматривать при решении неравенства $\log_x(7 - x) > 0$? Решите это неравенство.

11. Свойства логарифмов

В предыдущем пункте вы научились переходить от показательной формы записи равенств $a^x = b$ к логарифмической $x = \log_a b$ и обратно. Связь этих двух форм записи позволяет получить свойства логарифмов, основываясь на известных свойствах степеней.

Рассмотрим, например, произведение степеней с одинаковым основанием: $a^x a^y$. Пусть $a^x = b$ и $a^y = c$. Перейдем к логарифмической форме: $x = \log_a b$ и $y = \log_a c$, тогда $bc = a^{\log_a b} \cdot a^{\log_a c} = a^{\log_a b + \log_a c}$. От показательной формы равенства $bc = a^{\log_a b + \log_a c}$ перейдем к логарифмической форме:

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c.$$

Мы получили свойство логарифмов, позволяющее заменять логарифм произведения суммой логарифмов.

Аналогично можно получить еще два свойства, позволяющие преобразовывать

логарифм частного $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$

и логарифм степени $\log_a b^p = p \log_a b$.

Последнее свойство дает возможность вывести важную формулу, с помощью которой можно выразить логарифм с одним основанием через логарифм с другим основанием.

Пусть $\log_a b = x$. Перейдем к показательной форме $a^x = b$. Прологарифмируем это равенство по основанию c , т. е. найдем логарифмы с основанием c обеих частей этого равенства: $\log_c a^x = \log_c b$. Применяя к левой части свойство логарифма сте-

пени, получим $x \log_c a = \log_c b$ или $x = \frac{\log_c b}{\log_c a}$. Окончательно формула перехода от одного основания к другому выглядит так:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

Полезно запомнить частный случай формулы перехода, когда одно из оснований является степенью другого:

$$\log_{a^p} b = \frac{1}{p} \log_a b.$$

Примечание. Все рассмотренные свойства и формула перехода «работают», конечно, только, когда все входящие в них выражения имеют смысл.

Рассмотрим несколько примеров уравнений и неравенств, в решении которых применяются свойства логарифмов.

Пример 1. Решить уравнение

$$\log_2 x = 3 - 4 \log_2 \sqrt{3} + 3 \log_2 3.$$

Решение. Используя свойства логарифма произведения, частного и степени «справа налево», представим правую часть равенства в виде логарифма с основанием 2:

$$\begin{aligned} 3 - 4 \log_2 \sqrt{3} + 3 \log_2 3 &= \log_2 2^3 - \log_2 (\sqrt{3})^4 + \log_2 3^3 = \\ &= \log_2 \frac{2^3 \cdot 3^3}{(\sqrt{3})^4} = \log_2 \frac{8 \cdot 3^3}{3^2} = \log_2 (8 \cdot 3) = \log_2 24. \end{aligned}$$

Мы пришли к равенству $\log_2 x = \log_2 24$. *Потенцируя* это равенство, т. е. находя число по известному его логарифму, получим $x = 24$.

Ответ. 24.

Пример 2. Решить уравнение

$$\log_3 \frac{x-2}{x+2} + \log_3 (x^2 - 4) = 4.$$

Решение. Выражения, стоящие под знаками логарифмов, положительны при $x < -2$ и при $x > 2$. Этим условием определяется ОДЗ данного уравнения. Для всех значений x из ОДЗ мы можем применить к левой части уравнения свойство логарифма произведения:

$$\begin{aligned} \log_3 \frac{x-2}{x+2} + \log_3 (x^2 - 4) &= \log_3 \left(\frac{x-2}{x+2} (x^2 - 4) \right) = \\ &= \log_3 \frac{(x-2)(x-2)(x+2)}{x+2} = \log_3 (x-2)^2. \end{aligned}$$

По определению логарифма от равенства $\log_3 (x - 2)^2 = 4$ приходим к равенству $(x - 2)^2 = 3^4$.

Далее имеем $x - 2 = \pm 9$, $x_1 = 11$, $x_2 = -7$. Оба найденных числа входят в ОДЗ, а значит, являются корнями исходного уравнения.

О т в е т. $-7; 11$.

П р и м е ч а н и е 1. В левой части уравнения $\log_3 (x - 2)^2 = 4$ можно было воспользоваться свойством логарифма степени: $\log_3 (x - 2)^2 = 2 \log_3 |x - 2|$ — модуль необходимо поставить, чтобы не потерять корни, при которых выражение $x - 2$ принимает отрицательные значения. Вообще, полезно иметь в виду, что

$$\log_a b^{2n} = 2n \log_a |b|, \text{ где } n — \text{целое число.}$$

П р и м е ч а н и е 2. Свойствами логарифмов в преобразованиях выражений с переменными следует пользоваться осторожно, поскольку они могут изменить область допустимых значений переменных. Так, например, применив в левой части рассмотренного уравнения свойства логарифмов частного и произведения, мы получили бы уравнение

$$\log_3 (x - 2) - \log_3 (x + 2) + \log_3 (x - 2) + \log_3 (x + 2) = 4, \quad 2 \log_3 (x - 2) = 4,$$

ОДЗ которого $x > 2$ меньше, чем ОДЗ исходного уравнения. Продолжая решение, получаем:

$$\log_3 (x - 2) = 2, \quad x - 2 = 9, \quad x = 11.$$

При таком решении корень -7 оказался «съеден» уменьшением или, как говорят математики, *сужением* ОДЗ. Понятно, что потерю корней нельзя обнаружить, проверяя оставшиеся корни, поэтому

избегать сужения области допустимых значений.

П р и м е р 3. Решить уравнение

$$2 \log_x 5 - 3 \log_5 x = 1.$$

Р е ш е н и е. Приведем логарифмы левой части уравнения к одному основанию:

$$\log_x 5 = \frac{\log_5 5}{\log_5 x} = \frac{1}{\log_5 x}, \quad \frac{2}{\log_5 x} - 3 \log_5 x = 1,$$

$$3 \log_5^2 x + \log_5 x - 2 = 0, \text{ поскольку } \log_5 x \neq 0.$$

Решая полученное уравнение как квадратное относительно $\log_5 x$, получаем:

$$\log_5 x_1 = -1, \quad x_1 = \frac{1}{5}; \quad \log_5 x_2 = \frac{2}{3}, \quad x_2 = \sqrt[3]{25}.$$

$$\text{О т в е т. } \frac{1}{5}; \sqrt[3]{25}.$$

В предыдущем пункте мы обещали ответить на вопрос о том, как вычислять значения логарифмов. Проще всего значение логарифма можно найти с помощью инженерного калькулятора. Как правило, калькуляторы позволяют непосредственно находить значения логарифмов на выбор по одному из оснований 10 или $e \approx 2,7$ (более близкое знакомство с числом e ожидает вас в следующем классе).

Десятичные логарифмы (логарифмы с основанием 10) широко применялись в вычислительной практике в докомпьютерный период, а логарифмы с основанием e , так называемые *натуральные логарифмы*, используются в различных научных расчетах. Широкое распространение логарифмов с основаниями 10 и e дало им право на специальные обозначения:

$$\log_{10} a = \lg a, \log_e a = \ln a.$$

На инженерном калькуляторе для вычисления значения десятичного логарифма имеется клавиша «log», для натурального логарифма — клавиша «ln». А для вычисления логарифмов с другими основаниями у нас есть формула перехода.

Пусть, например, нужно найти значение $\lg 23,5$. Набираем число 23,5 и нажимаем клавишу «log». Дисплей калькулятора покажет число 1,37106786227173626920048050472471 (рис. 59), которое, естественно, мы округлим с нужной точностью.

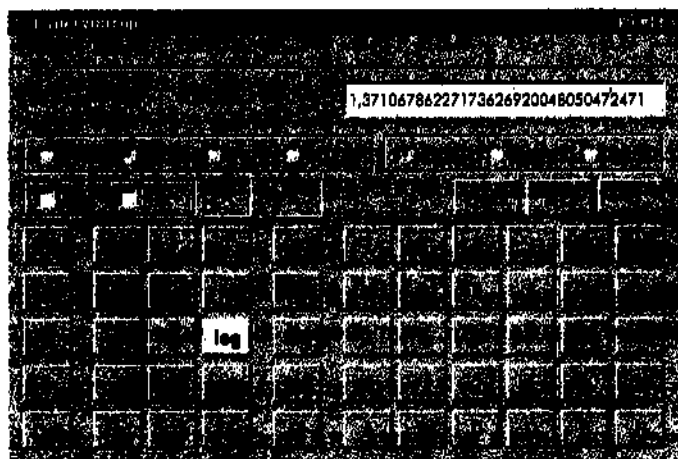


Рис. 59

Логарифмы, как средство для упрощения вычислений, были изобретены в начале XVII века. Титанический труд швейцарца И. Бюрги, шотландца Д. Непера, англичанина Г. Бригса и голландца А. Влакка, составивших многозначные логарифмические таблицы, более 300 лет помогал людям выполнять различные вычисления. *«Открытие логарифмов, — как сказал знаменитый французский математик, физик и астроном Пьер Лаплас, — удлинит человеческую жизнь, если оценивать ее не числом прожитых лет, а количеством сделанной работы».*

Генри Бригс составил 14-значные логарифмические таблицы. С принципом их использования мы познакомимся на примере двузначной таблицы десятичных логарифмов.

	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
1	0,00	0,04	0,08	0,11	0,15	0,18	0,20	0,23	0,26	0,28
2	0,30	0,32	0,34	0,36	0,38	0,40	0,41	0,43	0,45	0,46
3	0,48	0,49	0,51	0,52	0,53	0,54	0,56	0,57	0,58	0,59
4	0,60	0,61	0,62	0,63	0,64	0,65	0,66	0,67	0,68	0,69
5	0,70	0,71	0,72	0,72	0,73	0,74	0,75	0,76	0,76	0,77
6	0,78	0,79	0,79	0,80	0,81	0,81	0,82	0,83	0,83	0,84
7	0,85	0,85	0,86	0,86	0,87	0,88	0,88	0,89	0,89	0,90
8	0,90	0,91	0,91	0,92	0,92	0,93	0,93	0,94	0,94	0,95
9	0,95	0,96	0,96	0,97	0,97	0,98	0,98	0,99	0,99	1,00

В этой таблице с двумя входами указаны значения десятичных логарифмов чисел от 1 до 9,9. Пусть, например, нужно найти $\lg 6,4$. Значение этого логарифма находим на пересечении строки 6 и столбца 0,4: $\lg 6,4 \approx 0,81$.

Вычислим корень уравнения $2^x = 3$, с которого в предыдущем пункте мы начали разговор о логарифмах: $x = \log_2 3 = \frac{\lg 3}{\lg 2} = \frac{0,48}{0,30} = 1,6$. Не слишком большая точность, но все же выше, чем мы могли получить из графика на рисунке 52.

В таблице нет значений логарифмов чисел, больших 9,9 и меньших 1. Однако таблицу можно использовать и для них.

Так, например, $\lg 438 = \lg (4,38 \cdot 100) = \lg 4,38 + \lg 100 \approx \lg 4,4 + 2 \approx 0,64 + 2 = 2,64 \approx 2,6$.

$\lg 0,078 = \lg (7,8 \cdot 10^{-2}) = \lg 7,8 + \lg 10^{-2} \approx 0,89 - 2 = -1,11 \approx -1,1$.

Примечание. Заметим, что в обоих случаях мы представляли число, стоявшее под знаком логарифма, в стандартном виде: $a \cdot 10^n$, где $1 < a < 10$ и n — целое. В этом случае сам логарифм представляется в виде суммы своей дробной и целой частей: $\lg (a \cdot 10^n) = \lg a + n$. Дробную часть десятичного логарифма называют *мантиссой*, а целую — *характеристикой*.

Покажем теперь, как использовались логарифмы в вычислении значений выражений.

Пример 4. Вычислить $\frac{0,63^2}{0,57^5 \cdot \sqrt{23}}$.

Решение. Обозначим буквой x данное выражение: $x = \frac{0,63^2}{0,57^5 \cdot \sqrt{23}}$ и прологарифмируем полученное равенство по основанию 10:

$$\lg x = \lg \frac{0,63^2}{0,57^5 \cdot \sqrt{23}} = \lg 0,63^2 - \lg (0,57^5 \cdot \sqrt{23}) = 2 \lg 0,63 - (5 \lg 0,57 + \frac{1}{2} \lg 23) = 2 \lg 0,63 - 5 \lg 0,57 - \frac{1}{2} \lg 23.$$

Найдем значения логарифмов:

$\lg 0,63 \approx 0,80 - 1 = -0,20$, $\lg 0,57 \approx 0,76 - 1 = -0,24$, $\lg 23 \approx 0,36 + 1 = 1,36$ и подставим их в полученное выражение

$$\lg x = 2 \cdot (-0,20) - 5 \cdot (-0,24) - \frac{1}{2} \cdot 1,36 \approx -0,40 + 1,20 - 0,68 = 0,12.$$

Наиболее близкие из значений, имеющих в таблице 0,11 и 0,15, соответствуют $\lg 1,3$ и $\lg 1,4$, значит, $\lg 1,3 < \lg x < \lg 1,4$ и $1,3 < x < 1,4$. С помощью двузначной таблицы и нельзя было надеяться более чем на две значащие цифры, однако все вычисления мы выполнили устно. Проверая свой ответ с помощью калькулятора, находим $x \approx 1,375$.

Упражнения

181. Из каких свойств степеней получаются формулы:

1) $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$; 2) $\log_a b^p = p \log_a b$?

• Выведите эти формулы.

182. Вычислите:

1) $\log_6 2 + \log_6 3$;

2) $\log_{\frac{1}{16}} 25 + \log_{\frac{1}{16}} 9$;

3) $\log_{\sqrt{3}} 12 - \log_{\sqrt{3}} 4$;

4) $\log_2 12 + \log_{0,5} 3$;

5) $\log_3 18 + \log_{\frac{1}{3}} 2$;

6)* $\log_{\sqrt{2}-1} (\sqrt{3} - \sqrt[4]{8}) - \log_{\sqrt{2}+1} (\sqrt{3} + \sqrt[4]{8})$;

7)* $\log_5 10 + \log_{\sqrt{5}} 100 - \log_{\sqrt[4]{5}} 0,1 + \log_{\frac{1}{\sqrt{5}}} 16$;

8)* $\log_3 49 \cdot \log_{\sqrt{7}} 5 \cdot \log_{25} 27$;

9)* $\log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8 \cdot \log_8 9$.

183. Зная, что $\log_6 2 = a$, выразите через a выражение:

1) $\log_6 16$;

4) $\log_{\sqrt[4]{216}} 0,125$;

7)* $\log_3 2$;

2) $\log_{\sqrt{6}} 2$;

5)[○] $\log_2 6$;

8)* $\log_{48} 54$.

3) $\log_{\sqrt[5]{36}} 8$;

6)[○] $\log_6 3$;

184[○]. Найдите: 1) $\lg 56$, зная, что $\lg 2 = a$ и $\log_2 7 = b$;

2) $\log_{30} 8$, зная, что $\lg 5 = a$ и $\lg 3 = b$.

185[○]. Найдите число a , зная, что:

1) $\log_3 a = 3 + 2 \log_{\sqrt{3}} 7 - \frac{1}{2} \log_9 16 - 4 \log_3 7$;

2) $\log_2 a = \log_4 7 + 2 \log_{\sqrt{2}} 3 + 0,5 \log_{0,5} 7 - 2$.

186*. Найдите натуральное число n такое, что:

1) $3^2 \cdot 3^5 \cdot 3^8 \cdot \dots \cdot 3^{3n-1} = 81^{10}$;

2) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \dots \cdot \log_n (n+1) = 10$.

187*. Не вычисляя значений логарифмов, докажите, что $2 < \log_3 2 + \log_2 3 < 3$.

188*. Найдите наименьшее значение выражения

$$|\log_x 7 + \log_7 x|.$$

189*. Сравните числа: 1) $\log_7 8$ и $\log_8 9$; 2) $\log_7 6$ и $\log_8 7$.

190. При решении следующих уравнений называйте свойства логарифмов, которые вы используете в преобразованиях, и подумайте, изменяют ли выполняемые преобразования ОДЗ (и если да, то как):

- 1) $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11$;
- 2) $\log_{10} x + \log_{\sqrt{10}} x + \log_{\sqrt[3]{10}} x + \dots + \log_{\sqrt[10]{10}} x = 5,5$;
- 3) $\log_{\sqrt{3}} x + \log_{\sqrt[3]{3}} x + \log_{\sqrt[4]{3}} x + \dots + \log_{\sqrt[10]{3}} x = 36$;
- 4) $\log_3 x \cdot \log_9 x \cdot \log_{27} x \cdot \log_{81} x = \frac{2}{3}$;
- 5) $\log_5 (3x - 2) + \log_5 (x - 7) = 2 + \log_5 2$;
- 6) $\log_2 (4 \cdot 3^x - 6) - \log_2 (9^x - 6) = 1$;
- 7) $\log_{\sqrt{5}} (4^x - 6) - \log_{\sqrt{5}} (2^x - 2) = 2$;
- 8) $\lg (5^x + x - 20) = x - x \lg 2$;
- 9) $3 \log_5 2 + 2 - x = \log_5 (3^x - 5^{2-x})$;
- 10) $3x - \log_8 8^x = \log_8 (3^{3x} + x^2 - 9)$;
- 11) $\log_3 (81^x + 3^{2x}) = 3 \log_{27} 90$;
- 12) $\log_{1-x} 3 - \log_{1-x} 2 - 0,5 = 0$;
- 13) $\log_x 9 + \log_x 729 = 10$;
- 14) $\log_{x^2} 16 + \log_{2x} 64 = 3$;
- 15) $\log_{4x+1} 7 + \log_{9x} 7 = 0$;
- 16) $2 \log_x 27 - 3 \log_{27} x = 1$;
- 17) $\log_4 \log_2 x + \log_2 \log_4 x = 2$;
- 18) $\log_x (9x^2) \cdot \log_{\frac{2}{3}} x = 4$.

191. Решите уравнение, логарифмируя обе его части:

- 1) $x^{\lg x} = 10\,000$;
- 2) $x^{\log_3 x + 2} = 8$;
- 3) $x^{\log_3 x - 4} = \frac{1}{27}$;
- 4) $x^{1 - \lg x} = 0,01$;
- 5) $x^{\log_3 8x} = 9$;
- 6) $x^{\log_3 x} = 4x$;
- 7) $x^{\frac{\lg x + 5}{3}} = 10^{5 + \lg x}$;
- 8) $10^{2x+1} = 7^x$;
- 9) $2^x = 3^{x-2}$;
- 10) $5^{x+1} = 0,2 \cdot 3^{2x+1}$;
- 11) $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$ при $x > 0$;
- 12) $x^{\log_9(x+3)} = 5^{\log_3 x}$.

192[•]. (Устно.) Решите уравнение

$$2^{\log_2 x^2} \cdot 5^{\log_2 x} = 400.$$

193. Сравните выражения $a^{\log_b c}$ и $c^{\log_b a}$.

На основании сформулированного вывода решите уравнения:

а) $5^{\lg x} = 50 - x^{\lg 5}$; б) $25^{\lg x} = 5 + 4x^{\lg 5}$.

194[○]. Решите уравнение:

1) $2 \lg x^2 - \lg^2(-x) = 4$; 2) $3 \lg x^2 - \lg^2(-x) = 9$.

195[○]. Решите неравенство:

1) $\log_{\pi}(x+27) - \log_{\pi}(16-2x) < \log_{\pi} x$;

2) $\log_{\sqrt{3}-1}(2x+3) + \log_{\sqrt{3}-1}(4-x) < \log_{\sqrt{3}-1}(2-3x)$;

3) $\log_{\pi-3}(2-7x) - \log_{\pi-3}(2-3x) > \log_{\pi-3}(x+4)$;

4) $\log_3(3^x - 1) \cdot \log_{\frac{1}{3}}\left(3^{x-2} - \frac{1}{9}\right) > -3$;

5) $\log_3(4^x + 1) + \log_{4^{x+1}} 3 > 2,5$;

6)[•] $\log_x(x+1) < \log_{\frac{1}{x}}(2-x)$;

7) $\log_4 \log_2 x + \log_2 \log_4 x \leq 0$;

8)[•] $\log_x \log_2(4^x - 12) \leq 1$;

9)[•] $\log_{0,5} \log_2 \log_{x-1} 9 > 0$;

10)[•] $\log_3 \log_{x^2} \log_{x^2} x^4 > 0$.

196. С помощью двузначной таблицы логарифмов найдите приближенные значения:

1) $\frac{7,2^{0,4}}{\sqrt{3,9}}$; 3) $\frac{0,043^{\frac{3}{5}} \sqrt{78}}{12}$; 5) $\frac{0,63^2}{0,83^{\frac{1}{3}} \sqrt{13}}$;

2) $\frac{4,8^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{5,4^{-3}}}$; 4) $\frac{\sqrt[3]{441}}{0,78^{\frac{5}{8}} \sqrt{81}}$; 6) $14^{0,85} - \frac{\sqrt[5]{58}}{\sqrt{0,67}}$.

■ Укажите с помощью калькулятора значения этих выражений с четырьмя верными значащими (кроме нулей в начале записи числа) цифрами.

Контрольные вопросы и задания

1. Что происходит с ОДЗ при замене $\log_a (x(x+3))$ на $\log_a x + \log_a (x+3)$? Что происходит с ОДЗ при обратной замене? В каком случае могут потеряться корни? В каком случае могут образоваться посторонние корни?

2. В каком случае при замене $\log_a (x+4)^c$ на $c \log_a (x+4)$ может произойти изменение ОДЗ? Могут ли при этом преобразовании появиться посторонние корни?

3. Решите уравнение $\log_3 x^2 + \log_9 x - \log_{\sqrt[3]{3}} x = 1$.

4. Как с помощью таблицы значений десятичных логарифмов найти значения логарифмов чисел, больших 10? Найдите с помощью двузначной таблицы логарифмов $\lg 0,0057$.



ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ИХ СВОЙСТВА

Слово «тригонометрия» произошло от двух греческих слов «*тригонон*» — треугольник и «*метрео*» — измеряю, и его можно перевести как знакомое вам по курсу планиметрии «*решение треугольников*». При решении прямоугольного треугольника вы впервые встретились с синусом и косинусом острого угла. В этой главе вы расширите свое знакомство с синусом, косинусом, а также еще с двумя тригонометрическими функциями: тангенсом и котангенсом.

12. Угол поворота

В курсе геометрии нам было достаточно углов, не превосходящих 360° . Иначе обстоит дело в ряде задач механики, связанных с вращательным движением. В этих задачах часто используют понятие угловой скорости вращения — угол поворота в единицу времени.

На рисунке 60 изображен проигрыватель грампластинок. В зависимости от положения переключателя грампластинка совершает 33, 45 или 78 оборотов в минуту. Найдем, на какой угол поворачивается пластинка за 1 с при каждом из положений переключателя.

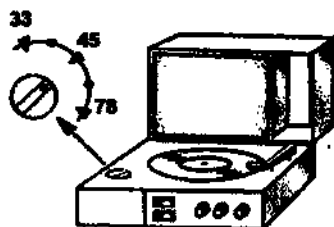


Рис. 60

Учитывая, что один оборот — это поворот на угол 360° , имеем:

$$33 \text{ об/мин} = \frac{33 \cdot 360^\circ}{60 \text{ с}} = 198 \text{ град/с},$$

$$45 \text{ об/мин} = \frac{45 \cdot 360^\circ}{60 \text{ с}} = 270 \text{ град/с},$$

$$78 \text{ об/мин} = \frac{78 \cdot 360^\circ}{60 \text{ с}} = 468 \text{ град/с}.$$

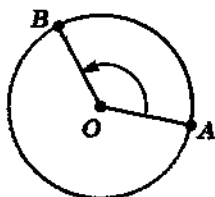


Рис. 61

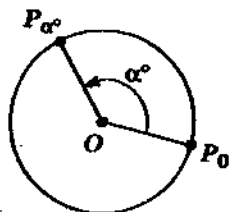


Рис. 62

В последнем случае угол, на который поворачивается диск проигрывателя за 1 с, оказался больше 360° . В технике часто встречаются скорости вращения, достигающие сотен оборотов в секунду, поэтому приходится рассматривать углы, во много раз превышающие 360° . Так, например, лазерный диск, пришедший на смену грампластинке, вращается уже со скоростью до 900 об/мин, а диски в винчестере современного персонального компьютера — со скоростью 15 000 об/мин.

Пусть, двигаясь по окружности, точка перешла из начального положения A в конечное положение B (рис. 61). При этом она повернулась вокруг центра окружности на некоторый угол.

Обозначим угол поворота через α° , начальную точку поворота через P_0 и конечную точку поворота через $P_{\alpha^{\circ}}$ (рис. 62).

Однако знать начальную и конечную точки поворота еще недостаточно, чтобы однозначно определить величину угла α° , так как неизвестно, сколько оборотов и в каком направлении (по часовой стрелке или против) совершила точка. На рисунке 63 изображено несколько вариантов возможного перемещения точки. Очевидно, что существует бесконечно много подобных поворотов.

Условились считать углы поворота против часовой стрелки положительными, а по часовой стрелке — отрицательными.

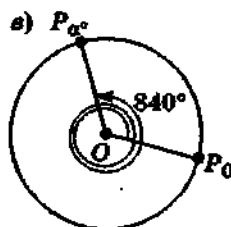
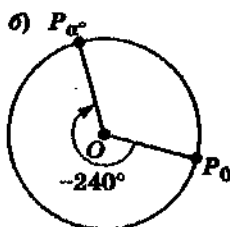
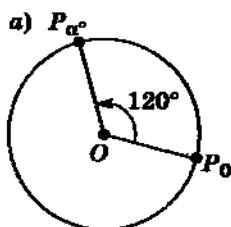


Рис. 63

Так, на рисунке 63, а угол поворота равен 120° , на рисунке 63, б изображен поворот на угол -240° , а на рисунке 63, в поворот состоит из двух полных оборотов против часовой стрелки и поворота на угол 120° , значит, угол этого поворота равен $120^\circ + 360^\circ \cdot 2 = 840^\circ$.

Заметим, что любые два поворота с начальной точкой P_0 и конечной точкой P_{α° отличаются друг от друга на целое число полных оборотов, т. е. на $360^\circ \cdot n$, где n — целое число.

В рассмотренном случае общий вид углов α° будет равен $120^\circ + 360^\circ \cdot n$, где n — любое целое число.

Общий вид углов поворота с конечной точкой P_{α° :

$$\alpha^\circ + 360^\circ \cdot n \quad (n \text{ — любое целое число}).$$

Подставляя в выражение $\alpha^\circ + 360^\circ \cdot n$ вместо n числа ± 1 , ± 2 , ± 3 и т. д., мы будем получать углы, повороты на которые имеют одну и ту же конечную точку P_{α° .

Упражнения

197. Приведите несколько примеров вращательного движения.

198. Барабан стиральной машины в режиме отжима может совершать или 400, или 600 оборотов в минуту. Найдите, с какой угловой скоростью вращается барабан в каждом из этих случаев.

199^о. Сравните значения угла поворота минутной и часовой стрелок часов за:

- | | | |
|----------------|----------------|-----------------|
| 1) 20 мин; | 3) 1 ч 20 мин; | 5) 40 ч 30 мин; |
| 2) 2 ч 45 мин; | 4) 7 ч 10 мин; | |

200^о. Два ученика, наблюдавшие за проехавшим велосипедистом, поспорили. Один заявил, что колеса велосипеда вращались по часовой стрелке, а другой — что против. Могут ли они оба быть правы?

201^о. Ведущая и ведомая звездочки одной из моделей велосипеда имеют соответственно 40 и 15 зубьев (рис. 64). На какой угол повернется ведомая звездочка, если ведущая повернется на угол:

- 1) 360° ; 2) 540°

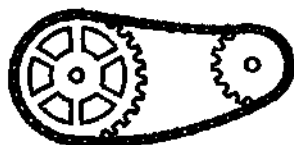


Рис. 64

202. Представьте данные углы в виде $\alpha^\circ + 360^\circ n$, где n — целое число и $0^\circ < \alpha^\circ < 360^\circ$:

- | | | | |
|-------------------|-------------------|-------------------|--------------------|
| 1) 840° ; | 3) -170° ; | 5) 3200° ; | 7) -2450° ; |
| 2) 1200° ; | 4) -390° ; | 6) 3500° ; | 8) -3100° . |

203. Представьте данные углы в виде $\alpha^\circ + 360^\circ n$, где n — целое число и $-180^\circ < \alpha^\circ < 180^\circ$:

- | | | | |
|------------------|-------------------|-------------------|--------------------|
| 1) 700° ; | 2) 3500° ; | 3) -470° ; | 4) -2890° . |
|------------------|-------------------|-------------------|--------------------|

С помощью транспортира постройте на окружности начальную и конечную точки поворота на данный угол.

204⁰. Выпишите все углы, модули которых не превышают 1000° :

- | | |
|-------------------------------|--|
| 1) $40^\circ + 360^\circ n$; | 2) $-70^\circ + 360^\circ n$ (n — целое число). |
|-------------------------------|--|

205⁰. Постройте точку P_{30° — конечную точку поворота на угол 30° . Постройте: а) квадрат; б) равносторонний треугольник с вершинами на окружности так, чтобы одной из вершин была точка P_{30° . Для каждой из вершин укажите общий вид углов поворота с конечной точкой в этой вершине.

• В каждом случае задайте одним выражением общий вид всех таких углов.

206⁰. Постройте окружность с центром в начале координат. За начальную точку поворота возьмите точку ее пересечения с осью абсцисс. Постройте точку P_{70° — конечную точку поворота на угол 70° . Постройте точку P_β — конечную точку поворота на угол β° так, чтобы точки P_{70° и P_β были симметричны:

- 1) относительно оси абсцисс;
- 2) относительно оси ординат;
- 3) относительно начала координат.

Для каждого случая укажите:

- а) наименьшее по модулю значение β ;
- б) наименьшее положительное значение β .

207⁰. По окружности в противоположных направлениях движутся две точки, одна с угловой скоростью 30 град/с, другая — 45 град/с.

1) Какое время проходит между двумя последовательными встречами точек?

2) Сколько всего точек встречи?

3) Через какое время после встречи обе точки снова встретятся в том же самом месте?

Контрольные вопросы и задания

1. Укажите какой-нибудь отрицательный угол, поворот на который имеет ту же конечную точку, что и поворот на угол 100° .

2. Укажите общий вид углов, поворот на которые имеет конечную точку P_{195° .

3. Постройте с помощью транспортира конечные точки поворотов на углы 145° , 215° и -250° .

13. Радианная мера угла

Уже в Древнем Вавилоне задолго до нашей эры углы измеряли в градусах. Градус, как вы знаете, — это $\frac{1}{360}$ часть полного оборота. Иногда такая единица измерения оказывается слишком большой. Так, например, в артиллерии при указании цели углы измеряют в *тысячных* (тысячных долях полного оборота), которые были введены во Франции в конце XVIII века.

В этом пункте вы познакомитесь еще с одним способом измерения углов, который наиболее часто применяют в математике.

Рассмотрим центральный угол в α° , которому соответствуют дуги двух произвольных концентрических окружностей: дуга A_1B_1 длиной l_1 и дуга A_2B_2 длиной l_2 (рис. 65). Обозначим радиусы этих окружностей соответственно через R_1 и R_2 .

Фигуры A_1OB_1 и A_2OB_2 подобны, поэтому отношение длины дуги, соответствующей центральному углу в α° , к радиусу окружности не зависит от размера окружности, а зависит только от величины угла α° .

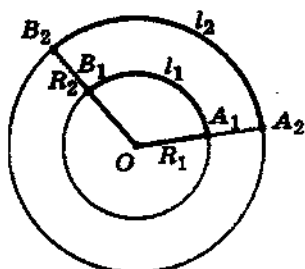


Рис. 65

Следовательно, частное $\frac{l}{R}$ можно использовать для определения величины соответствующего центрального угла.

В том случае, когда длина дуги равна радиусу окружности ($\frac{R}{R} = 1$), мы получаем угол в 1 *радиан* — единицу *радианной меры* угла.

Центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности, называется углом в 1 радиан.

Чтобы установить связь между градусной и радианной мерами одного и того же угла, рассмотрим центральный угол в 180° . Он опирается на половину окружности — дугу длиной πR . Радианная мера этого угла равна $\frac{\pi R}{R} = \pi$ рад. Таким образом, $180^\circ = \pi$ рад. Разделив обе части равенства на 180, получим, что $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ рад. И наконец, умножив это равенство на α , получим формулу перевода градусной меры в радианную:

$$\alpha^\circ = \frac{\alpha\pi}{180} \text{ рад.} \quad (1)$$

Аналогично, из равенства $\pi \text{ рад} = 180^\circ$ можно получить формулу перехода из радианной меры в градусную:

$$\alpha_{\text{рад}} = \frac{\alpha 180^\circ}{\pi}. \quad (2)$$

Пример 1. Выразить в радианах величины следующих углов: 30° , 40° , -480° .

Решение. Воспользуемся формулой (1):

$$30^\circ = \frac{30 \cdot \pi}{180} = \frac{\pi}{6} \text{ рад,} \quad 40^\circ = \frac{40 \cdot \pi}{180} = \frac{2\pi}{9} \text{ рад,}$$

$$-480^\circ = \frac{-480 \cdot \pi}{180} = -2\frac{2}{3} \pi \text{ рад.}$$

Ответ: $\frac{\pi}{6}$, $\frac{2\pi}{9}$, $-2\frac{2}{3}\pi$.

Пример 2. Выразить в градусах величины углов в $\frac{\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{2}$, -6 радиан.

Решение. Воспользуемся формулой (2):

$$\frac{\pi}{3} \text{ рад} = \frac{\pi \cdot 180^\circ}{3 \cdot \pi} = 60^\circ, \quad \frac{3\pi}{2} \text{ рад} = \frac{3\pi \cdot 180^\circ}{2 \cdot \pi} = 270^\circ,$$

$$-6 \text{ рад} = \frac{-6 \cdot 180^\circ}{\pi} \approx \frac{-6 \cdot 180^\circ}{3,14} \approx -344^\circ.$$

Ответ: 60° , 270° , -344° .

Как отношение одноименных величин, радианная мера угла является *числом*, поэтому обозначение *рад* обычно не указывают, записывая просто $\frac{\pi}{3} = 60^\circ$, $270^\circ = \frac{3\pi}{2}$, $-30^\circ = -\frac{\pi}{6}$ и т. п.

Таким образом, радианная мера позволяет для измерения углов использовать действительные числа, что особенно важно в математике, имеющей дело с числовыми множествами.

▼ Радианная мера углов позволяет значительно упростить многие формулы физики и математики. Выразим, например, с помощью радианной меры угла зависимость между угловой (ω) и линейной (v) скоростями равномерного движения по окружности.

Пусть за t секунд материальная точка проходит по окружности радиуса R путь, равный l , и совершает при этом поворот вокруг центра окружности на угол φ . Тогда линейная скорость точки: $v = \frac{l}{t}$, а угловая ее скорость: $\omega = \frac{\varphi}{t}$.

Из равенства $\varphi = \frac{l}{R}$ находим, что $l = \varphi R$. Подставим произведение φR вместо l в формулу линейной скорости:

$$v = \frac{l}{t} = \frac{\varphi R}{t} = \omega R.$$

Линейная скорость равна произведению угловой скорости на радиус окружности: $v = \omega R$. Δ

Градусная мера обычно применяется при решении практических задач с использованием транспорта.

Упражнения

208. Переведите углы из градусной меры в радианную:

- 1) 0° ; 3) 20° ; 5) 125° ; 7) -225° ;
2) 1° ; 4) 45° ; 6) 185° ; 8) -375° .

209. Переведите углы из радианной меры в градусную:

- 1) π ; 4) $-0,3\pi$; 7) $-\frac{7}{10}\pi$; 9) 2 ;
2) $\frac{2\pi}{5}$; 5) $\frac{\pi}{4}$; 8) $1,8\pi$; 10) $2,4$.
3) $0,2\pi$; 6) 2π ;

210°. Переведите углы из градусной меры в радианную, представляя результат в виде произведения $k\pi$, где k — рациональное число:

- 1) 36° ; 4) 265° ; 7) 870° ; 9) -2510° ;
 2) 48° ; 5) -120° ; 8) 1020° ; 10) -2940° .
 3) 225° ; 6) -135° ;

211°. Заполните таблицу.

α°	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	330°	360°
φ												

212°. На рисунке 66 в окружности проведены 8 диаметров. Скопируйте рисунок в тетрадь. У концов диаметров укажите углы поворотов в градусной и в радианной мере.

Укажите углы конечных точек поворотов, которые симметричны относительно:

- а) горизонтального диаметра;
 б) вертикального диаметра.

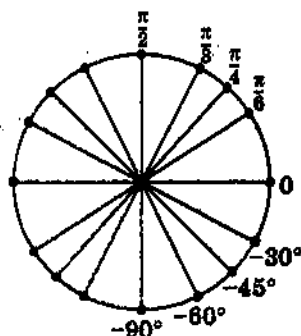


Рис. 66

213. Зная, что $\frac{\pi}{180} \approx 0,0175$, переведите в радианную меру величины углов:

- 1) 20° ; 4) -100° ; 7) 1080° ; 9) -1600° ;
 2) 50° ; 5) 250° ; 8) 1300° ; 10) -2450° .
 3) -80° ; 6) 310° ;

214. Окружность морского компаса делится на 32 равные части, называемые румбами. Выразите румб в градусах и радианах.

215.° Переведите из радианной меры в градусную, взяв $\pi \approx 3,14$:

- 1) 0,25; 3) -1,625; 5) 1,15; 7) -4,382;
 2) 3,45; 4) 5,285; 6) 2,64; 8) 7,168.

216. Напишите общий вид углов поворота вокруг начала координат, переводящих точку $P(1; 0)$ окружности с центром в начале координат и радиусом, равным единице, в точку:

- 1) $M(0; 1)$; 2) $N(0; -1)$; 3) $K(-1; 0)$.

217°. С какой угловой скоростью ω (рад/ч) Земля вращается вокруг своей оси?

• С какой линейной скоростью v (км/ч) при этом движется точка экватора Земли, отстоящая от оси на расстояние 6370 км? Выполните вычисления с помощью двузначной таблицы логарифмов (с. 94).

218. Шкив скоростного электродвигателя делает 120 000 оборотов в минуту. Определите угловую скорость вращения этого шкива:

- 1) в градусах в секунду; 2) в радианах в секунду.

219. Что означает слово «радиальная» в словосочетаниях «радиальная линия метро», «радиальная планировка города»?

Контрольные вопросы и задания

1. Что такое угол в один радиан?

2. Выразите:

- а) в градусах $1,2\pi$, $-0,7\pi$; б) в радианах 64° , -145° .

3. Постройте на окружности начальную и конечную точки поворота на угол: 135° , $\frac{3\pi}{4}$, $-\frac{5\pi}{6}$.

14. Синус и косинус любого угла

При решении прямоугольных треугольников находят синус и косинус острых углов. В теоремах синусов и косинусов для косоугольных треугольников появляются и тупые углы.

Теперь нам предстоит находить синусы и косинусы произвольных углов, с которыми вы познакомились в двух предыдущих пунктах. Но сначала напомним, как определяется синус и косинус острого угла в прямоугольном треугольнике (рис. 67):

Синус угла равен отношению противолежащего катета к гипотенузе, косинус угла равен отношению прилежащего катета к гипотенузе:

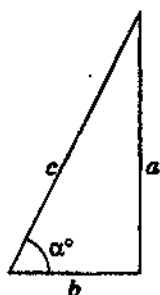


Рис. 67

$$\sin \alpha^\circ = \frac{a}{c}, \quad \cos \alpha^\circ = \frac{b}{c}.$$

Полезно помнить значения синусов и косинусов некоторых острых углов:

α°	30°	45°	60°
φ рад	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\sin \varphi$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \varphi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Синус и косинус произвольного угла придется определять по-другому. Рассмотрим для этого *единичную окружность* — окружность с центром в начале координат и радиусом 1.

Пусть, двигаясь по этой окружности, точка перешла из начальной точки $P_0(1; 0)$ в конечную точку P_φ (рис. 68). Положение точки P_φ можно определить двумя способами: указав величину угла φ или указав ее координаты x и y в данной системе координат.

Для углов от 0 до $\frac{\pi}{2}$ (от 0° до 90°) координаты точки P_φ найдем из прямоугольного треугольника $P_\varphi CO$ (рис. 68), гипотенуза которого равна 1:

$$x = \cos \varphi, \quad y = \sin \varphi.$$

Равенства остаются верными для любых углов, если определить косинус и синус следующим образом:

Синусом угла φ называется ордината конечной точки поворота точки $(1; 0)$ вокруг начала координат на угол φ .

Косинусом угла φ называется абсцисса конечной точки поворота точки $(1; 0)$ вокруг начала координат на угол φ .

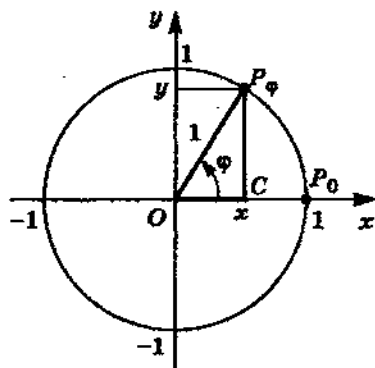


Рис. 68

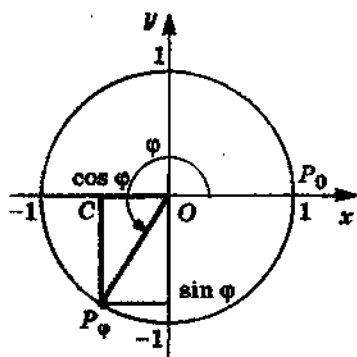


Рис. 69

Таким образом, абсцисса любой точки единичной окружности равна косинусу, а ее ордината — синусу соответствующего угла (рис. 69).

Рассматривая φ как переменную, заметим, что любому ее значению соответствует единственное значение выражения $\cos \varphi$ и единственное значение выражения $\sin \varphi$. Следовательно, формулы

$$x = \cos \varphi \text{ и } y = \sin \varphi$$

задают функции переменной φ .

Пример 1. Найти синус и косинус угла 310° .

Решение. Построим единичную окружность с центром в начале координат. Точка $P_0(1; 0)$ — начальная точка поворота (рис. 70).

Поворот на угол 310° можно заменить одним полным оборотом на 360° и поворотом на угол -50° : $310^\circ = 360^\circ - 50^\circ$.

Отложим от начальной точки P_0 с помощью транспортира угол, равный -50° , и найдем координаты точки P_{310° — конечной точки поворота на угол 310° : $x \approx 0,64$, $y \approx -0,77$.

О т в е т: $\cos 310^\circ \approx 0,64$, $\sin 310^\circ \approx -0,77$.

В зависимости от величины угла конечная точка может оказаться в любой из четырех координатных четвертей.

По положению конечной точки углы называют углами I, II, III или IV четверти.

В рассмотренной задаче конечная точка находилась в IV четверти (рис. 70), значит, 310° — угол IV четверти.

Пример 2. Найти углы, косинусы которых равны 0,8.

Решение. Косинус — это абсцисса соответствующей точки единичной окружности. Все точки с абсциссами, равными 0,8, принадлежат прямой, параллельной оси ординат и проходящей через точку $C(0,8; 0)$ (рис. 71). Эта прямая пересекает единичную окружность в двух точках: P_{α° и P_{β° , симметричных относительно оси абсцисс.

С помощью транспортира находим, что угол α° приближенно равен 37° . Значит, общий вид углов поворота с конечной точкой P_{α° :

$$\alpha^\circ \approx 37^\circ + 360^\circ n \quad (n \text{ — любое целое число}).$$

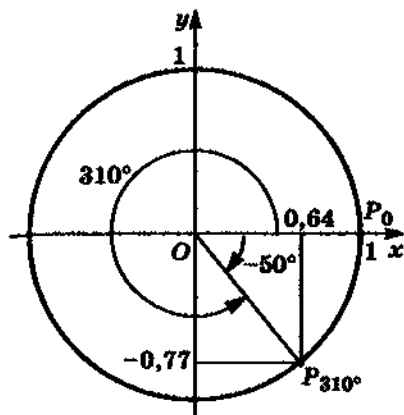


Рис. 70

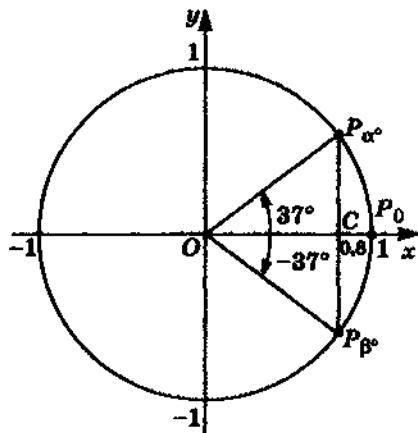


Рис. 71

В силу симметрии относительно оси абсцисс точка P_{β° — конечная точка поворота на угол -37° . Значит, для нее общий вид углов поворота:

$$\beta^\circ \approx -37^\circ + 360^\circ n \quad (n \text{ — любое целое число}).$$

О т в е т: $37^\circ + 360^\circ n, -37^\circ + 360^\circ n$ (n — любое целое число).

Пример 3. Найти углы, синусы которых равны 0,5.

Решение. Синус — это ордината соответствующей точки единичной окружности. Все точки с ординатами, равными 0,5, принадлежат прямой, параллельной оси абсцисс и проходящей через точку $D(0; 0,5)$ (рис. 72).

Эта прямая пересекает единичную окружность в двух точках: P_φ и $P_{\pi-\varphi}$, симметричных относительно оси ординат.

В прямоугольном треугольнике OKP_φ катет KP_φ равен половине гипотенузы OP_φ , значит, $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

Общий вид углов поворота с конечной точкой P_φ :

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi n \quad (n \text{ — любое целое число}).$$

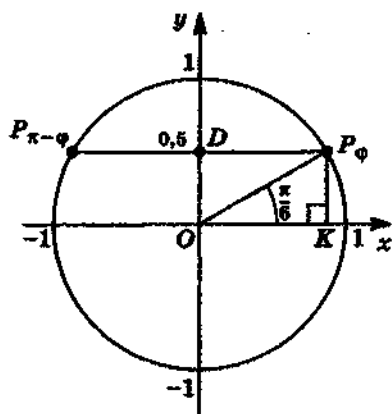


Рис. 72

Общий вид углов поворота с конечной точкой $P_{\pi-\varphi}$:

$$\pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi n = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \quad (n - \text{любое целое число}).$$

Ответ: $\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$ (n — любое целое число).

Упражнения

220. Даны координаты точки P_α единичной окружности.

Укажите $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$:

1) $(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$; 3) $(-\frac{1}{3}; \frac{2\sqrt{2}}{3})$;

2) $(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2})$; 4) $(-\frac{3}{5}; -\frac{4}{5})$.

В какой координатной четверти расположена каждая точка?

221. Определите, в какой координатной четверти находится P_α — конечная точка поворота на угол α , и каковы знаки $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$, если угол α равен:

1) 260° ; 4) 480° ; 7) 8760° ;

2) 290° ; 5) -915° ; 8) 8000° .

3) 565° ; 6) -825° ;

222°. Используя рисунок единичной окружности, определите знаки $\cos \beta$ и $\sin \beta$, если:

1) $\beta = \frac{4\pi}{9}$; 3) $\beta = -\frac{5\pi}{9}$; 5) $\beta = 5,5$;

2) $\beta = -1,6\pi$; 4) $\beta = 1,2\pi$; 6) $\beta = 4,8$.

223°. С помощью единичной окружности найдите:

1) $\sin 1115^\circ$; 3) $\sin (-2120^\circ)$;

2) $\cos 1490^\circ$; 4) $\cos (-2030^\circ)$.

224. Найдите общий вид углов, для которых число:

1) 0,4; 3) -0,6; 5) $\frac{2}{3}$;

2) 0,7; 4) -0,3; 6) $-\frac{3}{4}$

является: а) синусом; б) косинусом.

225. В каких координатных четвертях знаки синуса и косинуса:

а) совпадают; б) противоположны?

226. Постройте точку P_α и найдите $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$, если:

- 1) $\alpha^\circ = 72^\circ$; 2) $\alpha^\circ = 320^\circ$; 3) $\alpha^\circ = 105^\circ$; 4) $\alpha^\circ = 215^\circ$.

227⁰. Найдите углы:

- 1) синус которых равен: а) 0,5; б) -0,5;
2) косинус которых равен: а) 0,5; б) -0,5.

228. Найдите значение выражения:

- 1) $3 \sin 90^\circ - 2 \cos 270^\circ$; 4) $2 \sin 270^\circ - 3 \cos 180^\circ$;
2) $4 \cos 0^\circ - 3 \sin 270^\circ$; 5) $3 \cos 270^\circ + 5 \sin 0^\circ$;
3) $\sin \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{2}$; 6) $\sin \frac{3\pi}{2} \cos \pi$.

229⁰. Для каких углов от 0° до 360° :

- 1) синус равен косинусу;
2) синус противоположен косинусу;
3) синус и косинус имеют равные модули;
4) [•] синус больше косинуса;
5) [•] синус меньше косинуса?

230⁰. Заполните таблицу.

α°	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°
φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$				
$\sin \varphi$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$				
$\cos \varphi$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$				
α°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°
φ								
$\sin \varphi$								
$\cos \varphi$								

231⁰. Найдите x , y и z — углы треугольника в радианах, если $\frac{\sin x}{1} = \frac{\sin y}{\sqrt{3}} = \frac{\sin z}{2}$.

232⁰. Имеет ли смысл выражение:

- | | |
|-----------------------------------|---|
| 1) $\sqrt{\sin 165^\circ}$; | 6) $\log_3 \cos \frac{11\pi}{5}$; |
| 2) $\lg \sin 195^\circ$; | 7) $\sqrt{\sin 40^\circ - \cos 40^\circ}$; |
| 3) $\log_{0,5} \cos 248^\circ$; | 8) $\log_{0,6} (\sin 50^\circ - \cos 50^\circ)$; |
| 4) $\sqrt{\cos 287^\circ}$; | 9) $\ln (\sin 1 - \cos 1)$; |
| 5) $\sqrt{\cos \frac{4\pi}{7}}$; | 10) $\sqrt{\sin 7 - \cos 7}$? |

233⁰. Укажите все значения φ из промежутка $[0; 2\pi]$, для которых верно равенство:

- | | |
|-------------------------|--------------------------|
| 1) $\sin \varphi = 1$; | 3) $\sin \varphi = -1$; |
| 2) $\cos \varphi = 1$; | 4) $\cos \varphi = -1$. |

234⁰. Запишите общий вид углов φ , для которых верно равенство:

- | | |
|-------------------------|-------------------------|
| 1) $\sin \varphi = 0$; | 2) $\cos \varphi = 0$. |
|-------------------------|-------------------------|

235⁰. Укажите все значения φ , при которых не имеет смысла выражение:

- | | | |
|--|--|---|
| 1) $\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$; | 3) $\frac{\cos \varphi}{1 - \sin \varphi}$; | 5)* $\lg \frac{\cos \varphi}{1 + \sin \varphi}$; |
| 2) $\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}$; | 4) $\frac{\sin \varphi}{1 + \cos \varphi}$; | 6)* $\lg \frac{\sin \varphi}{1 - \sin \varphi}$. |

236⁰. Объясните, как получена цепочка равенств:

- | |
|--|
| 1) $\cos \frac{\pi}{2} = \cos \frac{5\pi}{2} = \cos \frac{9\pi}{2} = \cos \left(-\frac{3\pi}{2}\right) = \cos \left(\frac{7\pi}{2}\right)$; |
| 2) $\sin \pi = \sin (-\pi) = \sin 3\pi = \sin (-3\pi)$. |

237⁰. Сравните числовые значения:

- | | |
|--|--|
| 1) $\sin \frac{\pi}{6}$ и $\sin \left(-\frac{\pi}{6}\right)$; | 2) $\cos \frac{\pi}{6}$ и $\cos \left(-\frac{\pi}{6}\right)$. |
|--|--|

* Какие предположения о последствиях изменения знака аргумента синуса и косинуса можно высказать?

Контрольные вопросы и задания

1. Что называется синусом и косинусом любого угла φ ?

2. Выполняв необходимые построения и измерения, найдите косинус и синус угла 150° .

3. В какой четверти находится каждый из следующих углов $0,8\pi$, $1,3\pi$, $1,7\pi$? Какие знаки имеют его синус и косинус?

15. Тангенс и котангенс любого угла

В курсе геометрии вы познакомились с тангенсом острого угла, равным частному синуса и косинуса этого угла:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}.$$

С помощью этого равенства можно определить тангенс любого угла φ , косинус которого отличен от нуля:

Тангенсом угла называется частное синуса и косинуса этого угла.

Для углов, косинусы которых равны нулю, т. е. углов вида $\frac{\pi}{2} + \pi n$ (n — любое целое число), тангенс не существует.

Косинус и синус любого угла изображаются как абсцисса и ордината соответствующей точки единичной окружности. Единичная окружность поможет и при изображении тангенса.

На рисунке 73 к единичной окружности в точке P_0 проведена касательная; P_φ — конечная точка поворота на угол φ ; C — точка пересечения касательной и прямой OP_φ .

Ордината точки C равна тангенсу угла φ .

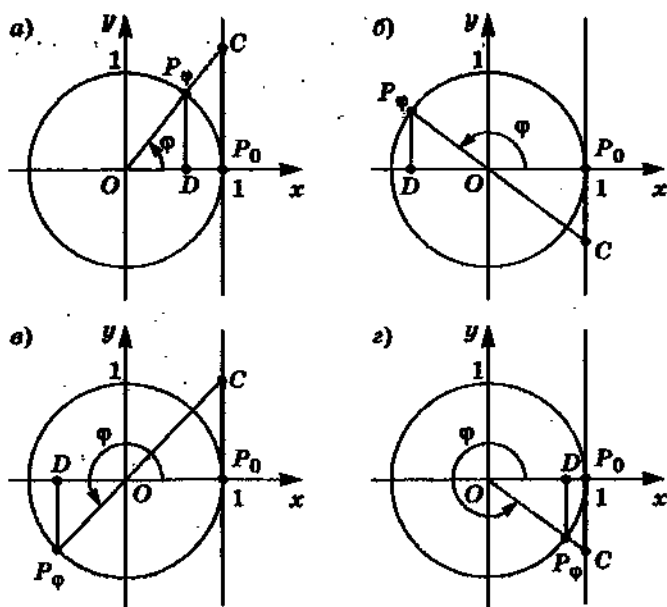


Рис. 73

▼ Докажем это. Заметим сначала, что $\operatorname{tg} \varphi$ и ордината точки C одинаковы по знаку. Так, если P_φ — точка I или III координатной четверти, то $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$ или оба положительны (рис. 73, а) или оба отрицательны (рис. 73, в). Значит, их частное $\operatorname{tg} \varphi$ положительно. Точка C в этих случаях расположена в верхней полуплоскости и, следовательно, имеет положительную ординату.

Если же точка P_φ находится во II или в IV координатной четверти, то знаки $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$ различны (рис. 73, б, г), следовательно, $\operatorname{tg} \varphi$ отрицателен. Точка C при этом находится в нижней полуплоскости и имеет отрицательную ординату.

Остается показать, что $|P_0C| = |\operatorname{tg} \varphi|$. Это равенство следует из подобия треугольников P_0OC и DOP_φ (рис. 73):

$$\frac{|P_0C|}{1} = \frac{|DP_\varphi|}{|OD|} = \frac{|\sin \varphi|}{|\cos \varphi|} = |\operatorname{tg} \varphi|.$$

Итак, наше утверждение доказано. $\triangle$

Касательную, проведенную к единичной окружности в точке P_0 , называют осью тангенсов.

Наверное, поэтому математик Т. Финк в конце XVI века назвал отношение синуса к косинусу «тангенсом», что в переводе с латыни означает «касающийся».

Прямая OC проходит через начало координат, ее уравнение, как вы знаете, $y = kx$.

При $x = 1$ получаем $y = k$, т. е. угловой коэффициент прямой $y = kx$ равен ординате точки C . Значит,

$$k = \operatorname{tg} \varphi.$$

Угол φ , образованный в верхней полуплоскости прямой $y = kx$ и лучом Ox , называют *углом наклона прямой*. Такие же углы образуют с положительным направлением оси абсцисс все прямые $y = kx + b$:

угловой коэффициент прямой $y = kx + b$ равен тангенсу ее угла наклона.

В тригонометрии наряду с синусом, косинусом и тангенсом рассматривают *котангенс угла* — частное косинуса и синуса:

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}.$$

Это равенство позволяет определить котангенс любого угла, синус которого отличен от нуля, т. е.

$$\varphi \neq \pi n \ (n \text{ — любое целое число}).$$

Пример 1. Найти тангенс и котангенс угла 220° .

Решение. Построим единичную окружность с центром в начале координат и проведем ось тангенсов. Отметим на окружности с помощью транспортира точку P_{220° ($220^\circ = 360^\circ - 140^\circ$). Через точку P_{220° и начало координат проведем прямую — она пересечет ось тангенсов в точке C (рис. 74). Ордината этой точки приближенно равна 0,84. Значит,

$$\operatorname{tg} 220^\circ \approx 0,84.$$

Заметив, что

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} = \frac{1}{\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}} = \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi},$$

найдем:

$$\operatorname{ctg} 220^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 220^\circ} \approx \frac{1}{0,84} \approx 1,2.$$

Ответ: $\operatorname{tg} 220^\circ \approx 0,84$, $\operatorname{ctg} 220^\circ \approx 1,2$.

Можно было для определения значения котангенса воспользоваться *осью котангенсов* (рис. 75). Абсцисса точки пересечения прямой, касающейся единичной окружности в точке $(0; 1)$, с прямой OP_φ равна котангенсу угла φ .

Доказательство этого факта аналогично доказательству, проведенному для оси тангенсов.

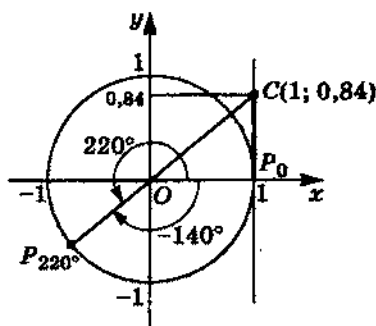


Рис. 74

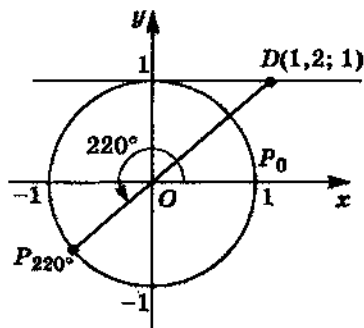


Рис. 75

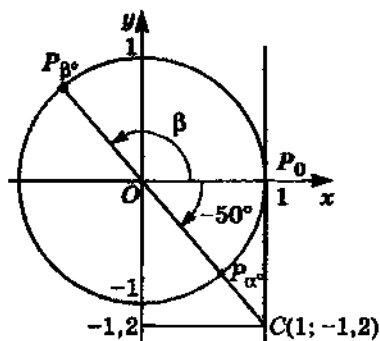


Рис. 76

Пример 2. Найти общий вид углов, тангенс которых равен $-1,2$.

Решение. Отметим на оси тангенсов точку C с ординатой, равной $-1,2$, и проведем прямую OC . Прямая OC пересекает единичную окружность в точках P_α и P_β — концах одного и того же диаметра (рис. 76). Углы, соответствующие этим точкам, отличаются друг от друга на целое число полуоборотов, т. е.

на $180^\circ n$ (n — целое число). С помощью транспортира находим, что угол $P_\alpha OP_0$ равен -50° . Значит, общий вид углов, тангенс которых равен $-1,2$, следующий: $-50^\circ + 180^\circ n$ (n — целое число).

Ответ: $-50^\circ + 180^\circ n$ ($n \in \mathbb{Z}$).

По синусу и косинусу углов 30° , 45° и 60° легко найти их тангенсы и котангенсы. Например,

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Перечисленные углы довольно часто встречаются в разных задачах, поэтому полезно запомнить значения тангенса и котангенса этих углов.

α	30°	45°	60°
φ рад	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\operatorname{tg} \varphi$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg} \varphi$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Упражнения

238. Даны координаты точки P_α на единичной окружности. Вычислите $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$:

- 1) $(-\frac{3}{5}; \frac{4}{5})$; 2) $(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2})$; 3) $(\frac{12}{13}; -\frac{5}{13})$; 4) $(\frac{2}{3}; \frac{\sqrt{5}}{3})$.

239. Определите знак выражения:

- | | |
|--|---|
| 1) $\operatorname{tg} 148^\circ$; | 7) $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} \operatorname{tg} \frac{3\pi}{5}$; |
| 2) $\operatorname{ctg} 248^\circ$; | 8) $\operatorname{tg} \frac{2\pi}{5} \operatorname{ctg} \frac{5\pi}{4}$; |
| 3) $\operatorname{ctg} 348^\circ$; | 9) $^\circ \operatorname{tg} 68^\circ - \sin 68^\circ$; |
| 4) $\operatorname{tg} 548^\circ$; | 10) $^\circ \operatorname{tg} 125^\circ + \sin 125^\circ$; |
| 5) $\operatorname{tg} 230^\circ \sin 130^\circ$; | 11) $^\circ \operatorname{tg} 1,7\pi - \sin 1,7\pi$; |
| 6) $\cos 285^\circ \operatorname{ctg} 185^\circ$; | 12) $^\circ \operatorname{tg} 1,2\pi + \sin 1,2\pi$. |

240. В каких координатных четвертях синус и тангенс имеют: 1) одинаковые знаки; 2) разные знаки?

241. 1) В каких четвертях тангенс и котангенс: а) положительны; б) отрицательны?

2) $^\circ$ Могут ли тангенс и котангенс одного угла иметь разные знаки?

242. С помощью оси тангенсов найдите:

- | | | |
|-----------------------------------|------------------------------------|--|
| 1) $\operatorname{tg} 72^\circ$; | 3) $\operatorname{tg} 126^\circ$; | 5) $^\circ \operatorname{ctg} 215^\circ$; |
| 2) $\operatorname{tg} 40^\circ$; | 4) $\operatorname{tg} 310^\circ$; | 6) $^\circ \operatorname{ctg} 165^\circ$. |

243 $^\circ$. Найдите общий вид углов, тангенс которых равен:

- | | | | |
|---------|---------|----------|----------|
| 1) 1,3; | 2) 0,7; | 3) -0,4; | 4) -1,7. |
|---------|---------|----------|----------|

244 $^\circ$. Для каких углов от 0° до 360° :

- 1) тангенс равен котангенсу;
- 2) тангенс противоположен котангенсу;
- 3) тангенс больше котангенса;
- 4) тангенс меньше котангенса?

245 $^\circ$. Докажите, что синус острого угла меньше тангенса того же угла.

246 $^\circ$. С помощью единичной окружности определите, имеет ли смысл выражение:

- | | | | |
|-----------------------------------|--------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------|
| 1) $\sqrt{\operatorname{tg} 2}$; | 2) $\lg \operatorname{tg} 4$; | 3) $\sqrt[4]{\operatorname{tg} 5}$; | 4) $\lg \operatorname{tg} 6$. |
|-----------------------------------|--------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------|

247 $^\circ$. Докажите, что абсцисса точки пересечения прямой OP_ϕ с осью котангенсов равна $\operatorname{ctg} \phi$.

248°. Заполните таблицу.

α°	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$						
$\operatorname{tg} \varphi$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1		—				
$\operatorname{ctg} \varphi$	—	$\sqrt{3}$							

249. Вычислите:

- 1) $\operatorname{tg} \pi \cdot \cos \frac{\pi}{2}$; 3) $\cos \frac{\pi}{6} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$;
 2) $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$; 4) $2 \cos \frac{3\pi}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \pi$.

250. Проверьте справедливость равенства:

$$\cos 30^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ - 1 = \operatorname{ctg} 60^\circ (1 + \sin^2 45^\circ).$$

251°. Найдите все углы φ , при которых верно равенство:

- 1) $\operatorname{tg} \varphi = 0$; 2) $\operatorname{ctg} \varphi = 0$; 3) $\operatorname{tg} \varphi = 1$; 4) $\operatorname{tg} \varphi = -1$.

252°. Найдите все углы φ из промежутка $[0; 2\pi]$, для которых верно равенство:

- 1) $\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{3}$; 4) $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{\sqrt{3}}{3}$;
 2) $\operatorname{ctg} \varphi = \sqrt{3}$; 5) $\lg \operatorname{tg} \varphi = \lg \sin \varphi - \lg \cos \varphi$;
 3) $\operatorname{tg} \varphi = -\sqrt{3}$; 6) $\lg \operatorname{ctg} \varphi = \lg \cos \varphi - \lg \sin \varphi$.

253°. Укажите все углы φ , для которых не имеет смысла выражение:

- 1) $\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi}$; 3) $\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi - 1}$; 5) $\lg \operatorname{tg} \varphi$;
 2) $\frac{1}{\operatorname{ctg} \varphi}$; 4) $\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi + 1}$; 6) $\lg \operatorname{ctg} \varphi$.

254°. Запишите уравнение прямой, если известно, что она проходит: 1) через начало координат; 2) через точку с координатами $(0; 3)$ и ее угол наклона равен:

- а) 80° ; б) 45° ; в) 120° ; г) 135° .

255. Что больше:

- 1) $\sin 1^\circ$ или $\sin 1$; 3) $\sin 15^\circ$ или $\sin 15$;
 2) $\operatorname{tg} 1$ или $\operatorname{tg} 2$; 4) $\cos 3$ или $\cos 4$?

Контрольные вопросы и задания

1. Что называется тангенсом и котангенсом любого угла φ ?
2. При каких значениях φ выражение $\operatorname{ctg} \varphi \operatorname{tg} \varphi$ не имеет смысла? Докажите, что равенство $\operatorname{ctg} \varphi \operatorname{tg} \varphi = 1$ верно при всех допустимых значениях φ .
3. С помощью оси тангенсов найдите $\operatorname{tg}(-40^\circ)$.

16. Простейшие тригонометрические уравнения

В предыдущих пунктах вы уже находили угол по значению его синуса, косинуса, тангенса или котангенса. Другими словами, вы уже решали уравнения вида

$$\sin \varphi = a, \cos \varphi = a, \operatorname{tg} \varphi = a, \operatorname{ctg} \varphi = a.$$

Эти четыре уравнения принято называть *простейшими тригонометрическими уравнениями*. В дальнейшем нам будут встречаться различные тригонометрические уравнения, однако все они в процессе решения будут сводиться к простейшим. Естественно поэтому сначала выяснить, как решаются простейшие тригонометрические уравнения.

Уравнение $\sin \varphi = a$

Прямая $y = a$ при $-1 < a < 1$ пересекает окружность в двух точках P_φ и $P_{\pi-\varphi}$ (рис. 77). Число φ , принадлежащее промежутку $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, синус которого равен a , называют *арксинусом a* . Обозначение: $\arcsin a$ (« $\arcs$ » означает «дуга», а целиком « $\arcsin a$ » можно перевести как «угол, синус которого равен a »).

Из рисунка 77 видно, что уравнение $\sin \varphi = a$ при $-1 < a < 1$ имеет две серии корней:

$$\sin \varphi = a,$$

$$\varphi_1 = \arcsin a + 2\pi n,$$

$$\varphi_2 = \pi - \arcsin a + 2\pi n$$

(n — любое целое число).

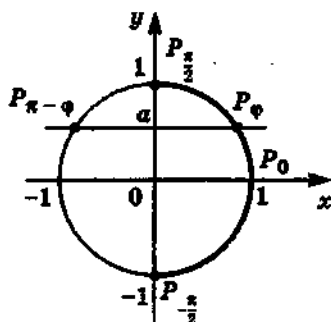


Рис. 77

Выражение для второй серии корней можно несколько упростить, записав:

$$\varphi_2 = -\arcsin a + (2n + 1)\pi.$$

Решение каждого из уравнений $\sin \varphi = 1$ и $\sin \varphi = -1$, как вы уже видели, записывается в виде одной серии корней:

$$\sin \varphi = 1, \varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad (n \text{ — любое целое число});$$

$$\sin \varphi = -1, \varphi = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad (n \text{ — любое целое число}).$$

Уравнение $\cos \varphi = a$

В данном случае нам надо рассмотреть прямую, перпендикулярную оси абсцисс, которая при $-1 < a < 1$ пересекает окружность в двух точках P_φ и $P_{-\varphi}$ (рис. 78). Как и в предыдущем случае, для числа φ вводят специальное название «арккосинус a » — *корень уравнения $\cos x = a$, принадлежащий промежутку $[0; \pi]$* (на рисунке 78 соответствующая дуга единичной окружности выделена); обозначают арккосинус числа a : $\arccos a$ (угол, косинус которого равен a).

Из рисунка видно, что уравнение $\cos \varphi = a$ при $-1 < a < 1$ имеет две серии корней:

$$\cos \varphi = a,$$

$$\varphi_1 = \arccos a + 2\pi n,$$

$$\varphi_2 = -\arccos a + 2\pi n$$

(n — любое целое число).

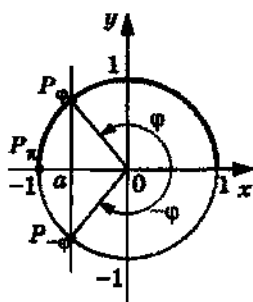


Рис. 78

Как и в случае синуса, решение каждого из уравнений $\cos \varphi = 1$ и $\cos \varphi = -1$ записывается в виде одной серии корней:

$$\cos \varphi = 1, \varphi = 2\pi n \quad (n \text{ — любое целое число});$$

$$\cos \varphi = -1, \varphi = \pi(2n + 1) \quad (n \text{ — любое целое число}).$$

Отметим, что если число a больше 1 или меньше -1 , то ни уравнение $\sin \varphi = a$, ни уравнение $\cos \varphi = a$ корней не имеют.

Уравнения $\operatorname{tg} \varphi = a$ и $\operatorname{ctg} \varphi = a$

Решения уравнений $\operatorname{tg} \varphi = a$ и $\operatorname{ctg} \varphi = a$ проиллюстрируем с помощью осей тангенсов и котангенсов (рис. 79).

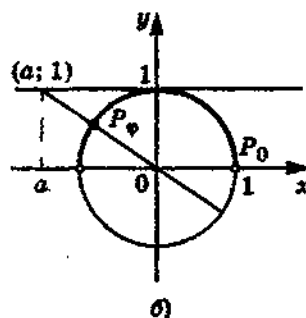
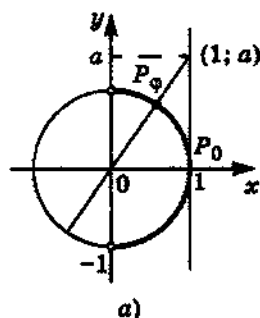


Рис. 79

Ясно, что число a в этих уравнениях может быть любым.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= a \\ \varphi &= \operatorname{arctg} a + \pi n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \varphi &= a \\ \varphi &= \operatorname{arccotg} a + \pi n \end{aligned}$$

(n — любое целое число)

$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} a < \frac{\pi}{2}$,
т. е. $\operatorname{arctg} a$ — угол
из промежутка $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$,
тангенс которого равен a ,
 $\operatorname{tg} (\operatorname{arctg} a) = a$

$0 < \operatorname{arccotg} a < \pi$,
т. е. $\operatorname{arccotg} a$ — угол
из промежутка $(0; \pi)$,
котангенс которого равен a ,
 $\operatorname{ctg} (\operatorname{arccotg} a) = a$

Пример 1. Найти корни уравнения $2 \sin x + \sqrt{3} = 0$, принадлежащие промежутку $[0; 2\pi]$.

Решение. Заменяем данное уравнение простейшим уравнением $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Его корни:

$$1) x = \arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 2\pi n,$$

$$2) x = \pi - \arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 2\pi n$$

(n — целое число).

Из рисунка 80 видно, что
 $\arcsin(-a) = -\arcsin a$.

С учетом этого можно записать:

$$\arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{3}.$$

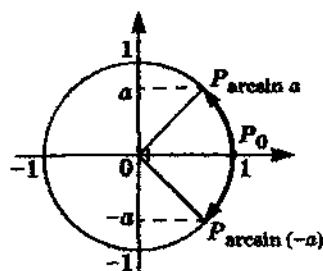


Рис. 80

Продолжая решение нашего уравнения, получим:

$$1) x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n;$$

$$2) x = \pi + \frac{\pi}{3} + 2\pi n.$$

Будем подставлять в эти две серии решений целые значения n и определять, принадлежат ли получаемые при этом решения промежутку $[0; 2\pi]$.

При $n = 1$ имеем

$$x_1 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}.$$

Другие решения этой серии выходят за границы промежутка, поскольку отстоят от x_1 не меньше, чем на 2π , а границы промежутка отличаются от x_1 меньше, чем на 2π .

Аналогично получаем единственное решение второй серии, входящее в указанный промежуток: при $n = 0$

$$x_2 = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}.$$

$$\text{О т в е т: } \frac{5\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}.$$

П р и м е ч а н и е. Получив простейшее уравнение $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, можно было изобразить его решения на единичной окружности (рис. 81) и сразу записать ответ.

П р и м е р 2. Найти значение $\arccos\left(\cos \frac{3\pi}{5}\right)$.

Р е ш е н и е. Для любого a из промежутка $[0; \pi]$ $\arccos(\cos a) = a$.

$$\text{Поскольку } 0 < \frac{3\pi}{5} < \pi, \arccos\left(\cos \frac{3\pi}{5}\right) = \frac{3\pi}{5}.$$

$$\text{О т в е т: } \frac{3\pi}{5}.$$

П р и м е р 3. Решить уравнение $7 \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 6 = 0$.

Р е ш е н и е. Обозначим $\operatorname{tg} x$ буквой y , тогда данное уравнение примет вид

$$7y^2 - y - 6 = 0.$$

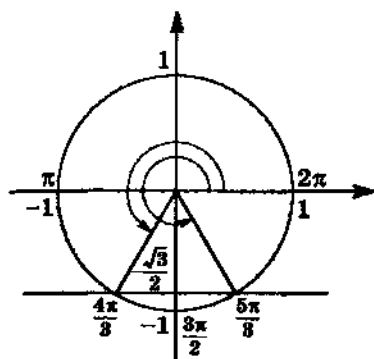


Рис. 81

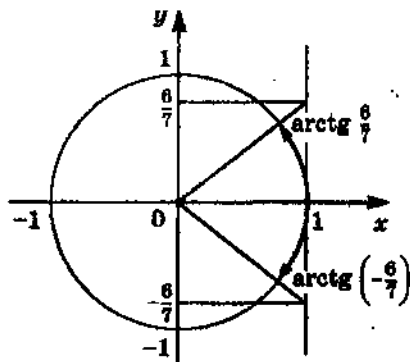


Рис. 82

Его корни: $y_1 = 1$, $y_2 = -\frac{6}{7}$. Возвращаясь к переменной x , получим:

1) $\operatorname{tg} x = 1$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$ (n — любое целое число);

2) $\operatorname{tg} x = -\frac{6}{7}$, $x = \operatorname{arctg}\left(-\frac{6}{7}\right) + \pi n$ (n — любое целое число).

Заметим, что $\operatorname{arctg}\left(-\frac{6}{7}\right) = -\operatorname{arctg}\frac{6}{7}$ (рис. 82). Поэтому вторую серию решений можно записать так:

$$x = \pi n - \operatorname{arctg}\frac{6}{7} \quad (n \text{ — любое целое число}).$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $\pi n - \operatorname{arctg}\frac{6}{7}$ (n — любое целое число).

Упражнения

256°. Используя таблицу значений синусов и косинусов, полученную при выполнении задания 230, заполните следующую таблицу:

a	-1	1	0	0,5	-0,5	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\arcsin a$									
$\arccos a$									

257. Используя таблицу значений тангенсов и котангенсов, полученную при выполнении задания 248, заполните следующую таблицу:

a	-1	1	0	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\arctg a$							
$\operatorname{arccctg} a$							

258. Постройте угол, равный:

- 1) $\arcsin \frac{4}{5}$; 3) $\arctg 2$;
 2) $\arccos \left(-\frac{3}{4}\right)$; 4) $\operatorname{arccctg} \left(-\frac{1}{4}\right)$.

259[○]. Используя графическую иллюстрацию, определите знак разности:

- 1) $\arcsin \frac{3}{4} - \arcsin 1$; 3) $\arctg 1 - \arctg 4$;
 2) $\arccos \frac{3}{4} - \arccos 1$; 4) $\operatorname{arccctg} 3 - \operatorname{arccctg} 1,5$.

260[●]. В каких границах заключен угол:

- 1) $\frac{1}{2} \arcsin p$; 3) $\frac{\pi}{2} + \arctg p$;
 2) $2 \arccos p$; 4) $\pi + \operatorname{arccctg} p$?

261. Вычислите:

- 1) $\arcsin \frac{1}{2}$; 4) $\operatorname{arccctg} \sqrt{3}$; 7) $\arctg \frac{\sqrt{3}}{3}$;
 2) $\arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 5) $\arccos 0$; 8) $\operatorname{arccctg} 0$.
 3) $\arctg (-1)$; 6) $\arcsin 1$;

262[○]. Найдите значение выражения:

- 1) $\arccos \left(\cos \frac{\pi}{6}\right)$; 4) $\operatorname{arccctg} (\operatorname{ctg} 1)$; 7) $\operatorname{tg} (\arctg 1)$;
 2) $\arcsin \left(\sin \frac{\pi}{6}\right)$; 5) $\cos \left(\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 8) $\operatorname{ctg} (\operatorname{arccctg} 1)$.
 3) $\arctg (\operatorname{tg} 1)$; 6) $\sin \left(\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

263°. Найдите значение выражения:

1) $\sin \left(\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} \right);$

2) $\cos \left(\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} + \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} \right);$

3) $\cos (\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arccotg} 1);$

4) $\operatorname{tg} \left(\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \operatorname{arctg} \sqrt{3} \right).$

264°. Может ли: 1) $\arcsin t$; 2) $\arccos t$; 3) $\operatorname{arctg} t$; 4) $\operatorname{arccotg} t$ принимать значения: а) 0; б) -1; в) 1; г) $\sqrt{2}$; д) $\frac{\pi}{6}$; е) $-\frac{\pi}{6}$; ж) $\frac{\pi}{2}$; з) $-\frac{\pi}{2}$; и) π ; к) -2π ; л) $3\sqrt{5}$?

265. Сравните α и β , если:

1) $5\alpha + \frac{\pi}{4} = \arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right);$ $10\beta + \frac{7\pi}{4} = \arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right);$

2) $3\alpha - \frac{\pi}{3} = \arccos \left(-\frac{1}{2} \right);$ $3\beta - \frac{4\pi}{3} = \arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right).$

266. Для каких значений a имеет смысл выражение:

1) $\arcsin a$; 2) $\arccos a$; 3) $\operatorname{arctg} a$; 4) $\operatorname{arccotg} a$?

267°. Найдите корни уравнения, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$:

1) $\sin x = 0;$ 5) $2 \sin \left(\frac{\pi}{3} - x \right) = 1;$

2) $\cos x - 1 = 0;$ 6) $\operatorname{ctg} (x - \pi) - 1 = 0;$

3) $3 \operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0;$ 7) $2 \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right) + \sqrt{2} = 0;$

4) $\operatorname{ctg}^2 x - 3 = 0;$ 8) $2 \sin^2 x - \sqrt{2} \sin x = 0.$

268°. Верно ли утверждение, что при любом значении a :

1) $\arcsin (\sin a) = a;$ 3) $\operatorname{arctg} (\operatorname{tg} a) = a;$

2) $\arccos (\cos a) = a;$ 4) $\operatorname{arccotg} (\operatorname{ctg} a) = a?$

Если вы считаете, что утверждение не верно, приведите опровергающий пример.

269°. Верно ли утверждение $\arcsin (\cos a) = \frac{\pi}{2} - a$ для любого значения a ?

270°. Что означают слова *арка*, *аркада*? Существует ли какая-нибудь связь этих слов со значением приставки «арк» в словах «*арксинус*», «*арккосинус*»?

271°. Решите уравнение:

1) $4 \sin^2 x + 5 \sin x + 1 = 0$; 2) $3 \cos^2 x + 2 \cos x - 5 = 0$.

272. 1) Объясните цепочку равенств:

$$\frac{\pi}{3} = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \arccos \frac{1}{2} = \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

2) Составьте аналогичные цепочки равенств для чисел $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{4}$.

Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте определения арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса числа.

2. Вычислите: $\left(\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3}$.

3. Найдите корни уравнений, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$:

а) $\sin x - 0,5 = 0$; б) $\operatorname{tg} x - 1 = 0$.

17. Формулы приведения

Уже в древности при выполнении различных расчетов применялись таблицы, в которых были приведены значения синусов, косинусов и тангенсов острых углов. Чтобы пользоваться такими таблицами, нужно было уметь приводить тригонометрические функции к углам от 0° до 90° (от 0 до $\frac{\pi}{2}$),

т. е. выражать значения тригонометрических функций любых углов через значения тригонометрических функций углов от 0° до 90° .

Рассмотрим сначала, как тригонометрические функции любого угла приводятся к функциям углов от 0° до 360° (от 0 до 2π).

Поскольку повороты на углы, отличающиеся друг от друга на $360^\circ n$ (на $2\pi n$), где n — любое целое число, имеют одну и ту же конечную точку, то уменьшение или увеличение аргумен-

та тригонометрической функции на 2π не изменяет ее значения:

$$\sin(\varphi \pm 2\pi) = \sin \varphi;$$

$$\cos(\varphi \pm 2\pi) = \cos \varphi;$$

$$\operatorname{tg}(\varphi \pm 2\pi) = \operatorname{tg} \varphi;$$

$$\operatorname{ctg}(\varphi \pm 2\pi) = \operatorname{ctg} \varphi.$$

Пример 1. Привести к углу от 0° до 360° (от 0 до 2π): $\cos 2000^\circ$, $\sin\left(-\frac{59\pi}{6}\right)$.

Решение. $\cos 2000^\circ = \cos(2000^\circ - 360^\circ \cdot 5) = \cos 200^\circ$;

$$\sin\left(-\frac{59\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6} - 2\pi \cdot 5\right) = \sin \frac{\pi}{6}.$$

Ответ: $\cos 200^\circ$, $\sin \frac{\pi}{6}$.

Получить следующие три формулы приведения нам помогут рисунки.

На рисунке 83 точки P_φ , $P_{-\varphi}$, $P_{\pi-\varphi}$ и $P_{\pi+\varphi}$ — конечные точки поворотов на углы φ , $-\varphi$, $\pi - \varphi$ и $\pi + \varphi$. Точки P_φ и $P_{-\varphi}$ симметричны относительно оси абсцисс, значит, абсциссы этих точек равны, а ординаты противоположны:

$$\cos(-\varphi) = \cos \varphi;$$

$$\sin(-\varphi) = -\sin \varphi.$$

Точки $P_{\pi-\varphi}$ и $P_{-\varphi}$, а также точки P_φ и $P_{\pi+\varphi}$ являются концами соответствующих диаметров единичной окружности и, следовательно, симметричны относительно ее центра — начала координат. Абсциссы этих точек противоположны, противоположны и их ординаты:

$$\cos(\pi - \varphi) = -\cos(-\varphi) = -\cos \varphi;$$

$$\cos(\pi + \varphi) = -\cos \varphi;$$

$$\sin(\pi - \varphi) = -\sin(-\varphi) = \sin \varphi;$$

$$\sin(\pi + \varphi) = -\sin \varphi.$$

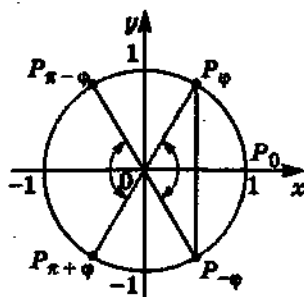


Рис. 83

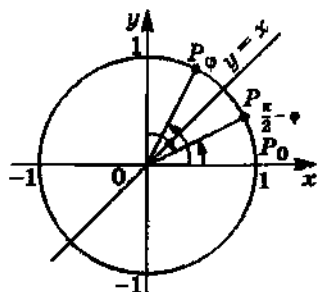


Рис. 84

Эти формулы позволяют привести к углам от 0 до $\frac{\pi}{2}$ (от 0° до 90°) синус и косинус любых углов.

Точки P_φ и $P_{\frac{\pi}{2}-\varphi}$ (рис. 84) — конечные точки поворота на углы φ и $\frac{\pi}{2} - \varphi$. Эти точки симметричны относительно прямой $y = x$. С симметрией относительно этой прямой вы уже

встречались, рассматривая графики взаимно-обратных функций.

Абсцисса точки $P_{\frac{\pi}{2}-\varphi}$ равна ординате точки P_φ , а ордината точки $P_{\frac{\pi}{2}-\varphi}$ равна абсциссе точки P_φ :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin \varphi; \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos \varphi.$$

Полученные формулы приведения позволяют понять происхождение терминов «косинус» и «котангенс». В формуле $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos \varphi$ аргумент косинуса дополняет аргумент синуса до $\frac{\pi}{2}$: $\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + \varphi = \frac{\pi}{2}$. От перестановки слов *sinus complementi* (синус дополнения) и сокращения одного из них образовался термин «косинус». Термин «котангенс» стали применять по аналогии с «косинусом».

Для приведения к углу φ синусов и косинусов углов $\frac{\pi}{2} + \varphi$, $\frac{3\pi}{2} - \varphi$ и $\frac{3\pi}{2} + \varphi$ можно использовать симметрии точки $P_{\frac{\pi}{2}-\varphi}$ с точкой $P_{\frac{\pi}{2}+\varphi}$ относительно оси ординат, с точкой $P_{\frac{3\pi}{2}-\varphi}$ относительно начала координат и с точкой $P_{\frac{3\pi}{2}+\varphi}$ относительно оси абсцисс (рис. 85).

Но можно применить и уже полученные формулы приведения. Для этого достаточно заметить, что

$$\frac{\pi}{2} + \varphi = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right),$$

$$\frac{3\pi}{2} - \varphi = \pi + \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right),$$

$$\frac{3\pi}{2} + \varphi = 2\pi - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right).$$

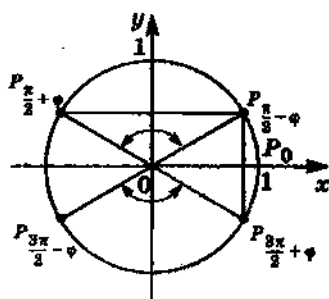


Рис. 85

Формулы приведения для тангенса и котангенса легко получить, рассматривая их как частные синуса и косинуса, например:

$$\operatorname{tg}(\pi - \varphi) = \frac{\sin(\pi - \varphi)}{\cos(\pi - \varphi)} = \frac{\sin \varphi}{-\cos \varphi} = -\operatorname{tg} \varphi.$$

α	$\varphi + 2\pi$	$-\varphi$	$\pi - \varphi$	$\pi + \varphi$
$\sin \alpha$	$\sin \varphi$	$-\sin \varphi$	$\sin \varphi$	$-\sin \varphi$
$\cos \alpha$	$\cos \varphi$	$\cos \varphi$	$-\cos \varphi$	$-\cos \varphi$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \varphi$	$-\operatorname{tg} \varphi$	$-\operatorname{tg} \varphi$	$\operatorname{tg} \varphi$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \varphi$	$-\operatorname{ctg} \varphi$	$-\operatorname{ctg} \varphi$	$\operatorname{ctg} \varphi$
α	$\frac{\pi}{2} - \varphi$	$\frac{\pi}{2} + \varphi$	$\frac{3\pi}{2} - \varphi$	$\frac{3\pi}{2} + \varphi$
$\sin \alpha$	$\cos \varphi$	$\cos \varphi$	$-\cos \varphi$	$-\cos \varphi$
$\cos \alpha$	$\sin \varphi$	$-\sin \varphi$	$-\sin \varphi$	$\sin \varphi$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \varphi$	$-\operatorname{ctg} \varphi$	$\operatorname{ctg} \varphi$	$-\operatorname{ctg} \varphi$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \varphi$	$-\operatorname{tg} \varphi$	$\operatorname{tg} \varphi$	$-\operatorname{tg} \varphi$

Формулы приведения являются тождествами, т. е. они верны для любых допустимых значений φ . Анализируя полученную таблицу, можно заметить, что:

1) *знак в правой части формулы совпадает со знаком приводимой функции в соответствующей четверти, если считать φ острым углом;*

2) *название меняют только функции углов $\frac{\pi}{2} \pm \varphi$ и $\frac{3\pi}{2} \pm \varphi$ ($90^\circ \pm \alpha^\circ$ и $270^\circ \pm \alpha^\circ$).*

Пример 2. Привести $\cos 289^\circ$ к острому углу.

Решение. Можно рассуждать следующим образом:

1) 289° — угол IV четверти, в которой косинус положителен, значит, в правой части формулы нет знака « $\rightarrow$ »;

2) $289^\circ = 270^\circ + 19^\circ$ — название меняется.

Таким образом, $\cos 289^\circ = \cos (270^\circ + 19^\circ) = \sin 19^\circ$.

Ответ: $\cos 289^\circ = \sin 19^\circ$.

Примечание. Можно было представить 289° как $360^\circ - 71^\circ$, тогда название не изменяется и

$$\cos 289^\circ = \cos (360^\circ - 71^\circ) = \cos 71^\circ.$$

Понятно, что $\cos 71^\circ = \cos (90^\circ - 19^\circ) = \sin 19^\circ$.

Вычислять значения тригонометрических функций можно с помощью таблиц или инженерных калькуляторов. На инженерном калькуляторе из Windows, о котором мы упоминали в связи с вычислением степеней и логарифмов, нет нужды использовать формулы приведения для вычисления значений тригонометрических функций — это делает сам калькулятор (рис. 86).

Пример 3. С помощью калькулятора найти $\sin 43,5$.

Решение. Чтобы найти $\sin 43,5$, нужно сначала перейти в режим работы с радианами, для этого «щелкнуть» мышью

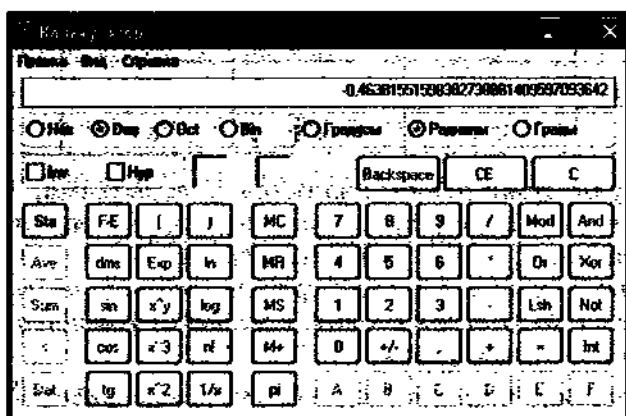


Рис. 86

на указателе Радьяны (*Rad*), набрать 43,5, «щелкнуть» клавишу *sin* и прочитать в окошке искомое значение $-0,46381551598382738881409597093642$ (рис. 86).

$$\sin 43,5 = -0,4638155159838 \approx -0,46$$

с точностью до сотых.

О т в е т: $\sin 43,5 \approx -0,46$.

П р и м е р 4. Вычислить с помощью калькулятора $\operatorname{ctg} 48757^\circ$ с точностью до тысячных.

Р е ш е н и е. Чтобы перевести калькулятор в режим работы с градусной мерой углов, следует «щелкнуть» на указателе Градусы (*Deg*). Введя число 48757, мы затем «щелкаем» клавишу tg (или $\tan$ — иное обозначение тангенса) и на $\frac{1}{x}$ — так как специальной клавиши для котангенса нет, мы находим его как величину, обратную тангенсу:

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{1}{\operatorname{tg} x}.$$

На индикаторе появится

$$-2,3558523658237528339395866623439.$$

О т в е т: $\operatorname{ctg} 48757^\circ \approx -2,356$.

П р и м е р 5. Вычислить с помощью калькулятора $\operatorname{arcsin} 0,7$.

Р е ш е н и е. Помогает инженерный калькулятор и в нахождении углов. Так, чтобы найти $\operatorname{arcsin} 0,7$, нужно ввести 0,7, «щелкнуть» на указателе *Inu* (от английского слова *inverse* — обратный) и на клавише *sin*. Если калькулятор находился в режиме работы с градусной мерой, то он покажет 44,42700400081, если в режиме работы с радианами, то в окошке мы увидим число 0,7753974966108.

О т в е т: $\operatorname{arcsin} 0,7 \approx 44,42700400081^\circ$, $\operatorname{arcsin} 0,7 \approx 0,7753974966108$. (Правда, трудно представить, что нам когда-нибудь потребуется вычислять углы с такой высокой точностью.)

С развитием электронно-вычислительной техники, позволяющей быстро и точно получать значения тригонометрических функций углов, заданных как в градусной, так и в радианной мере, вычисления значений тригонометрических функций практически перестали выполняться вручную. Однако в преобразованиях тригонометрических выражений формулы приведения используются довольно часто.

Упражнения

273. Приведите к углам от 0° до 90° (от 0 до $\frac{\pi}{2}$):

- 1) а) $\sin 152^\circ$; б) $\cos 124^\circ$; в) $\sin 242^\circ$;
 г) $\cos 196^\circ$; д) $\sin 312^\circ$; е) $\cos 326^\circ$;
2) а) $\sin 175^\circ$; б) $\cos 166^\circ$; в) $\sin 221^\circ$;
 г) $\cos 235^\circ$; д) $\sin 290^\circ$; е) $\cos 306^\circ$;
3) а) $\operatorname{tg} 111^\circ$; б) $\operatorname{ctg} 163^\circ$; в) $\operatorname{tg} 187^\circ$;
 г) $\operatorname{ctg} 215^\circ$; д) $\operatorname{tg} 286^\circ$; е) $\operatorname{ctg} 319^\circ$;
4) а) $\operatorname{ctg} (-11,2)$; б) $\cos 5,7$; в) $\sin 19,3$;
 г) $\operatorname{tg} (-8,3)$; д) $\sin (-12,5)$.

274. Приведите к углам от 0° до 45° :

- 1) а) $\sin 72^\circ$; б) $\cos 71^\circ$; в) $\operatorname{tg} 65^\circ$; г) $\operatorname{ctg} 50^\circ$;
2) а) $\sin 175^\circ$; б) $\cos 155^\circ$; в) $\operatorname{tg} 102^\circ$; г) $\operatorname{ctg} 98^\circ$;
3) а) $\sin 285^\circ$; б) $\cos 273^\circ$; в) $\operatorname{tg} 250^\circ$; г) $\operatorname{ctg} 222^\circ$;
4) а) $\sin (-355^\circ)$; б) $\cos (-451^\circ)$; в) $\operatorname{tg} (-317^\circ)$; г) $\operatorname{ctg} (-289^\circ)$.

● По какому принципу сгруппированы задания?

275. Упростите выражение:

- 1) $\sin 146^\circ + \sin 304^\circ + \sin (-56^\circ) + \cos (-34^\circ)$;
2) $\cos 220^\circ + \cos 320^\circ - \operatorname{tg} 110^\circ + \operatorname{ctg} 380^\circ$.

276[●]. Упростите выражение:

- 1) $\frac{\cos(\pi - x) \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sin(\pi + x)}$; 3) $\frac{\sin(\pi - \varphi) \cos(3\pi + \varphi)}{\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \varphi\right)}$;
2) $\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{\cos(\pi + x) \operatorname{tg}(-x)}$; 4) $\frac{\sin\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) \sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$.

■ 277. Найдите с точностью до тысячных значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса угла:

- 1) а) 120° ; б) -225° ; в) 300° ;
2) а) -150° ; б) 210° ; в) 315° ;
3) а) $\frac{7\pi}{3}$; б) $\frac{5\pi}{4}$; в) $-\frac{43\pi}{6}$.

■ 278. Вычислите с точностью до тысячных:

- 1) $3 \arccos 0,06 : \arcsin (-0,316)$;
2) $\arccos (-0,5213) - \operatorname{arctg} 3,148$;
3) $\arcsin 0,87 + \operatorname{arctg} (-57)$;
4) $\sin (\operatorname{arctg} (-2))$.

279°. Придумайте, как находить на калькуляторе значения арккотангенсов.

■ **280.** Найдите приближенное значение $\operatorname{arcsctg} a$, если a равно:

- 1) 15; 3) -26 589; 5) $\operatorname{tg} \sqrt{2}$;
2) -0,000547; 4) $-\frac{\pi}{3}$; 6) $\operatorname{tg} (-46^\circ)$.

281. Решите уравнение на промежутке $[0; 2\pi]$:

- 1) $2 \sin \left(\frac{\pi}{2} + x \right) = \sqrt{2}$; 3) $\operatorname{tg} (\pi + x) = 1$;
2) $2 \cos \left(\frac{3\pi}{2} - x \right) + 1 = 0$; 4) $3 \operatorname{ctg} (2\pi - x) = \sqrt{3}$.

282. Решите уравнение:

- 1) $2 \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) + \sqrt{2} = 0$;
2) $\cos (2\pi - x) + \sin \left(\frac{\pi}{2} + x \right) = \sqrt{2}$;
3) $\sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \sin \frac{\pi}{4}$;
4) $3 \operatorname{tg} \left(2x - \frac{\pi}{2} \right) - \sqrt{3} = 0$.

283°. Найдите значение выражения:

- 1) $\arcsin \left(\sin \frac{7}{9} \pi \right)$; 4) $\operatorname{arctg} (\operatorname{tg} 10)$;
2) $\arccos \left(\cos \frac{24\pi}{7} \right)$; 5) $\operatorname{arctg} (\operatorname{ctg} 10)$.
3) $\arccos (\sin 6)$;

Контрольные вопросы и задания

1. Какие координаты имеет точка B , симметричная точке $A(m; n)$ относительно:

- а) оси абсцисс; в) начала координат;
б) оси ординат; г) прямой $y = x$?

2. Докажите, что $\sin (270^\circ + \alpha^\circ) = -\cos \alpha^\circ$.

3. Найдите: а) $\sin 855^\circ$; б) $\operatorname{tg} \frac{84\pi}{3}$.

18. Свойства и график функции $y = \sin x$

Вы познакомились с некоторыми свойствами функции $y = \sin \varphi$, аргумент φ которой может принимать любые значения. Эти свойства удобно использовать при построении графика функции $y = \sin x$ (аргумент функции, как вы знаете, обычно обозначают буквой x).

Построим сначала график функции $y = \sin x$ на промежутке от 0 до $\frac{\pi}{2}$ (для значений x от 0 до $\frac{\pi}{2}$). На рисунке 87 показано, как можно получить точки графика функции $y = \sin x$ с помощью единичной окружности. Таким способом можно построить сколько угодно точек графика.

Соединив их плавной линией, получим график функции $y = \sin x$ на промежутке от 0 до $\frac{\pi}{2}$ (рис. 88, а).

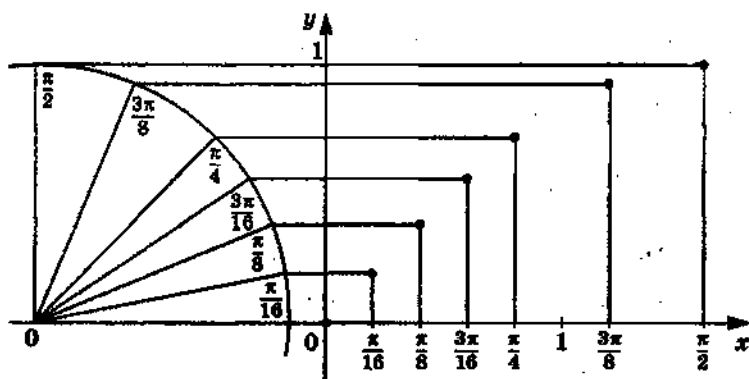


Рис. 87

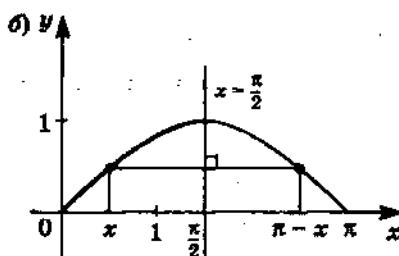
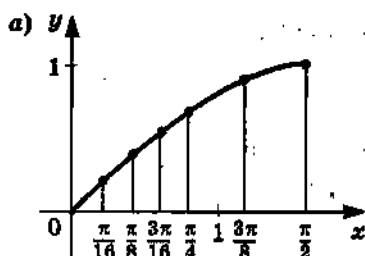


Рис. 88

График функции $y = \sin x$ на других промежутках получим из построенной части графика.

Формула $\sin(\pi - x) = \sin x$ позволяет, используя симметрию графика относительно прямой $x = \frac{\pi}{2}$ (рис. 88, б), построить его на промежутке от $\frac{\pi}{2}$ до π .

Формула $\sin(-x) = -\sin x$ позволяет получить график функции $y = \sin x$ на промежутке от $-\pi$ до 0, используя обычный для построения графиков нечетных функций прием — симметрию относительно начала координат (рис. 89).

Формула $\sin(2\pi + x) = \sin x$ показывает, что значения функции $y = \sin x$ через каждые 2π повторяются, т. е. для любого значения x

$$\sin(x - 2\pi) = \sin x = \sin(x + 2\pi).$$

Повторяющиеся события или явления в окружающем нас мире встречаются довольно часто: восход и заход солнца, бой часов на Спасской башне Московского Кремля, колебание маятника настенных старинных часов. И в математике мы встречались с бесконечным повторением группы цифр в дробной части десятичной дроби, например, при делении 4 на 33 получается бесконечная десятичная дробь $0,1212121212\dots$. Такие дроби называют периодическими. Этот же термин применяют и к функциям, значения которых повторяются.

Положительное число T называется периодом функции $y = f(x)$, если для любого значения x из ее области определения:

1) $x - T$ и $x + T$ тоже входят в область определения функции;

$$2) f(x - T) = f(x) = f(x + T).$$

Функции, имеющие период, называют периодическими.

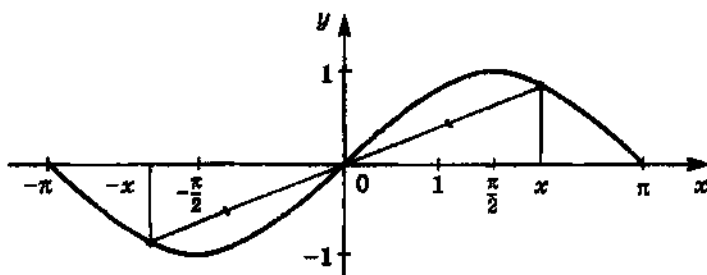


Рис. 89

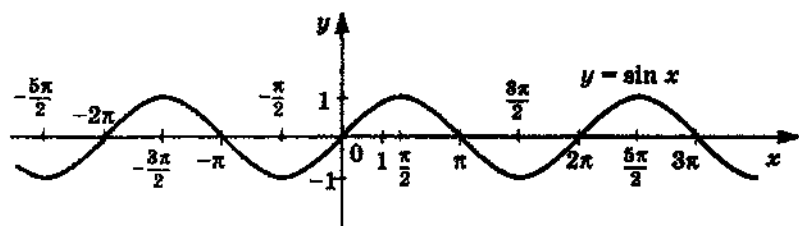


Рис. 90

Периодичность функции $y = \sin x$ позволяет получить ее график на промежутках от π до 3π , от -3π до $-\pi$, от 3π до 5π , от -5π до -3π и т. д. с помощью сдвига построенной части графика вдоль оси абсцисс вправо и влево на 2π , 4π и т. д. (рис. 90).

Примечание. В качестве периода функции $y = \sin x$ можно было бы взять 4π , 6π и т. д. Число 2π является наименьшим из ее периодов. В этом легко убедиться, найдя расстояние между двумя соседними точками графика с ординатами, равными 1. Например, $\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 2\pi$.

Полученная кривая называется *синусоидой*. Это первый график тригонометрических функций, который был опубликован в 30-х годах XVII века.

Синусоида — один из самых популярных графиков в физике. С ней непосредственно связано практически любое колебание. На рисунке 91 вы видите, что физический маятник на движущейся с постоянной скоростью бумажной ленте вычерчивает синусоиду.

Синусоиду образует и край срезанного наискось рулона бумаги (рис. 92).

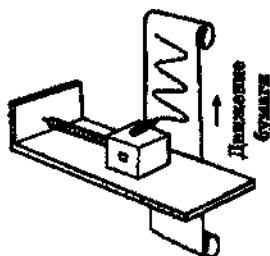


Рис. 91



Рис. 92



Рис. 93

Поверхность волн, как показано на рисунке 93, иногда напоминает синусоиду. Наверное, именно поэтому часть синусоиды длиной, равной периоду (например на промежутке от 0 до 2π), называют волной синусоиды.

Основные свойства функции $y = \sin x$

1. Аргумент функции может принимать любые значения.

2. Функция принимает любые значения от -1 до 1 .

3. Функция $y = \sin x$ нечетная, так как для любого значения x выполняется условие $\sin(-x) = -\sin x$.

График функции $y = \sin x$ симметричен относительно начала координат.

4. Функция $y = \sin x$ периодическая, ее наименьшим периодом является число 2π .

5. а) Функция $y = \sin x$ возрастает на промежутках $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, где n — любое целое число. (Например, при $n = 0$ получаем промежуток возрастания $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, а при $n = 2$ — промежуток $\left[\frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right]$.)

б) Функция убывает на промежутках $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$, где n — любое целое число. (Так, при $n = 0$ получаем промежуток $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, а при $n = -1$ — промежуток $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$.)

6. а) Функция принимает свое наибольшее значение, равное 1 , при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где n — любое целое число.

б) Функция принимает свое наименьшее значение, равное -1 , при $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где n — любое целое число.

7. Функция $y = \sin x$ принимает значение, равное нулю, при $x = \pi n$, где n — любое целое число.

Пример 1. Расположить в порядке возрастания $\sin 225^\circ$, $\sin 310^\circ$ и $\cos 118^\circ$.

Решение. Функция $y = \sin x$ возрастает на промежутке от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, следовательно, большему острому углу соответствует больший синус. Выразим данные в условии выражения через синусы острых углов:

$$\sin 225^\circ = \sin (180^\circ + 45^\circ) = -\sin 45^\circ,$$

$$\sin 310^\circ = \sin (360^\circ - 50^\circ) = -\sin 50^\circ,$$

$$\cos 118^\circ = \cos (90^\circ + 28^\circ) = -\sin 28^\circ.$$

Так как в первой четверти функция $y = \sin x$ возрастает, имеем: $\sin 28^\circ < \sin 45^\circ < \sin 50^\circ$. Значит, $-\sin 50^\circ < -\sin 45^\circ < -\sin 28^\circ$.

Ответ: $\sin 310^\circ$; $\sin 225^\circ$; $\cos 118^\circ$.

Пример 2. Доказать, что число π является периодом функции $y = \sin x \cdot \cos x$.

Доказательство. Поскольку аргумент x этой функции может принимать любые значения, нужно доказать, что при всех значениях x

$$\begin{aligned}\sin (x - \pi) \cos (x - \pi) &= \sin x \cos x = \\ &= \sin (x + \pi) \cos (x + \pi).\end{aligned}$$

Используя формулы приведения, получаем:

$$\begin{aligned}\sin (x - \pi) \cos (x - \pi) &= -\sin (\pi - x) \cos (\pi - x) = \\ &= -\sin x (-\cos x) = \sin x \cos x;\end{aligned}$$

$$\sin (x + \pi) \cos (x + \pi) = -\sin x (-\cos x) = \sin x \cos x,$$

что и требовалось доказать.

Упражнения

284. Воспользуйтесь графиком функции $y = \sin x$ для выполнения следующих заданий.

1) Можно ли по графику определить период функции? Являются ли следующие числа периодами данной функции: π , 2π , 3π , 4π ?

2) Как по графику определить четность функции?

3) Найдите точки, принадлежащие одновременно и промежуткам возрастания, и промежуткам убывания функции.

4) Назовите наибольшие и наименьшие значения функции.

5) Назовите корни уравнения: $\sin x = 0$; $\sin x = 1$; $\sin x = -1$.

6) Найдите значения: $\sin 0$; $\sin \frac{\pi}{2}$; $\sin \left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

285. Используя график функции $y = \sin x$, найдите приближенные значения:

- 1) $\sin 1$; 3) $\sin 0,5$; 5) $\sin \frac{\pi}{4}$; 7) $\sin \left(-\frac{\pi}{3}\right)$.
2) $\sin 2$; 4) $\sin (-1)$; 6) $\sin \frac{\pi}{5}$;

286. Используя график и свойства функции $y = \sin x$, сравните:

- 1) $\sin 160^\circ$ и $\sin 170^\circ$; 3) $\sin 1$ и $\sin 2$;
2) $\sin 230^\circ$ и $\sin 300^\circ$; 4) $\sin 5$ и $\sin 6$.

287. Постройте график функции $y = \sin x$ и выделите цветным карандашом те его точки, ординаты которых:

- 1) положительны; 2) отрицательны.

○ На каких промежутках функция $y = \sin x$ принимает положительные и на каких — отрицательные значения?

288. Постройте одну волну синусоиды $y = \sin x$ на промежутке от 0 до 2π , взяв за единицу 2,5 см. Выделите цветными карандашами разных цветов точки графика, ординаты которых:

- 1) равны: 0 ; $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{\sqrt{3}}{2}$;
2) больше: $\frac{1}{2}$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) меньше: $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

● Запишите абсциссы выделенных точек.

289○. Решите неравенство:

- 1) $\sin x < 1$; 3) $\sin x > \sqrt{2}$;
2) $\sin x > -1$; 4) $\sin x < -\sqrt{3}$.

290. Постройте график функции $y = \sin x$ и проведите несколько его осей симметрии.

● Напишите общий вид уравнения оси симметрии графика функции $y = \sin x$.

291. Постройте график функции $y = \sin x$ и отметьте несколько центров симметрии этого графика.

● Укажите общий вид абсцисс центров симметрии графика функции $y = \sin x$.

292●. Докажите, что число π является периодом функции:

1) $y = \sin^2 x$; 2) $y = |\sin x|$. Изобразите схематически график этой функции.

293. Является ли периодической функция: 1) $y = \{x\}$; 2) $y = [x]$? Если является, то какой у нее наименьший положительный период?

294[•]. Постройте график функции: 1) $y = \{2x\}$; 2) $y = \{0,5x\}$. Укажите ее наименьший положительный период.

295[•]. Укажите наибольшее и наименьшее значение функции:

- 1) $y = 2 \sin x$; 4) $y = 3 - 2 \sin x$;
2) $y = -\sin x$; 5)* $y = \sin^2 x - \sin x + 4$;
3) $y = \sin x + 0,5$; 6)* $y = \sin^2 x + 3 \sin x - 2$.

296[○]. Какие из следующих функций являются четными, а какие — нечетными:

- 1) $y = \sin^3 x$; 3) $y = \sin x^2$;
2) $y = \sin^4 x$; 4) $y = \sin x^3$?

297[•]. Постройте в одной системе координат графики функций: 1) $y = \sin x$, 2) $y = 2 \sin x$, 3) $y = \sin 2x$; 4) $y = \sin \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

С помощью каких преобразований графика функции $y = \sin x$ можно получить графики этих функций?

298[•]. При каких значениях a функция $y = \sin^2 2x + 6 \sin 2x + a$ принимает только положительные значения?

299*. Найдите все значения a , при которых определенная на интервале $\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right)$ функция: 1) $y = \sin^2 x - 2a \sin x - 7$; 2) $y = \cos^2 x - 2a \cos x - 7$ принимает свое наименьшее значение.

300[•]. Постройте график функции:

- 1) $y = |\sin x|$; 2) $y = \sin |x|$; 3) $y = |\sin |x||$.

Являются ли эти функции периодическими?

301[•]. 1) Являются ли функции секанс ($y = \sec x$) и косеканс ($y = \operatorname{cosec} x$) четными, если:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} ?$$

2) Изобразите эскизы графиков этих функций.

Контрольные вопросы и задания

1. Изобразите график функции $y = \sin x$ и перечислите основные свойства этой функции.

2. Сравните $\sin 305^\circ$ и $\sin 215^\circ$.

3. По графику функции $y = \sin x$ найдите: $\sin(-0,5)$, $\sin 1,5$ и $\sin 2,5$.

19. Свойства и график функции $y = \cos x$

Задачу построения графика функции $y = \cos x$ можно свести к построению графика функции $y = \sin x$. Действительно, поскольку $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, график функции $y = \cos x$ можно получить из графика функции $y = \sin x$ сдвигом последнего вдоль оси абсцисс влево на $\frac{\pi}{2}$ (рис. 94).

Полученный график является графиком функции $y = \cos x$ (рис. 95).

Основные свойства функции $y = \cos x$

1. Аргумент функции может принимать любые значения.

2. Функция принимает любые значения от -1 до 1 .

3. Функция $y = \cos x$ четная, так как для любого значения x $\cos(-x) = \cos x$.

График функции $y = \cos x$ симметричен относительно оси ординат.

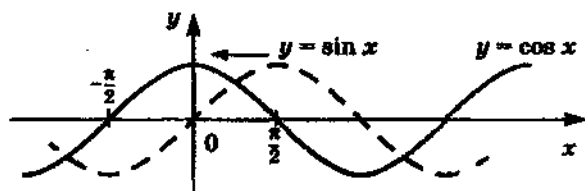


Рис. 94

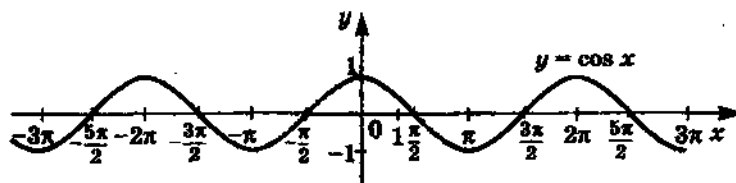


Рис. 95

4. Функция $y = \cos x$ периодическая. Ее наименьшим периодом является число 2π .

5. а) Функция возрастает на промежутках $[-\pi + 2\pi n; 2\pi n]$, где n — любое целое число. (Например, при $n = 0$ получаем промежуток возрастания $[-\pi; 0]$, а при $n = 1$ — промежуток от $[\pi; 2\pi]$.)

б) Функция убывает на промежутках $[2\pi n; \pi + 2\pi n]$, где n — любое целое число. (Так, при $n = 0$ получаем промежуток $[0; \pi]$, а при $n = -1$ — промежуток от $[-2\pi; -\pi]$.)

6. а) Функция принимает свое наибольшее значение, равное 1, при $x = 2\pi n$, где n — любое целое число.

б) Функция принимает свое наименьшее значение, равное -1 , при $x = \pi + 2\pi n$, где n — любое целое число.

7. Функция $y = \cos x$ принимает значение, равное нулю, при $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, где n — любое целое число.

Пример 1. Сравнить значения $\cos \frac{2\pi}{3}$ и $\cos \frac{5\pi}{4}$.

Решение. На промежутке от 0 до $\frac{\pi}{2}$ функция $y = \cos x$ убывает. Приведем данные выражения к косинусам углов из этого промежутка:

$$\cos \frac{2\pi}{3} = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = -\cos \frac{\pi}{3};$$

$$\cos \frac{5\pi}{4} = \cos \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) = -\cos \frac{\pi}{4}.$$

В силу убывания функции $y = \cos x$ на промежутке от 0 до $\frac{\pi}{2}$ имеем:

$$\cos \frac{\pi}{4} > \cos \frac{\pi}{3}, \text{ откуда } -\cos \frac{\pi}{4} < -\cos \frac{\pi}{3}.$$

Ответ: $\cos \frac{2\pi}{3} > \cos \frac{5\pi}{4}$.

Пример 2. Решить неравенство $2 \cos \left(3\varphi - \frac{\pi}{4} \right) < -1$.

Решение. Обозначим аргумент косинуса буквой x , т. е. $3\varphi - \frac{\pi}{4} = x$. Разделим обе части неравенства на 2: $\cos x < -\frac{1}{2}$.

Отметим какую-нибудь часть графика функции $y = \cos x$, точки которой имеют ординаты, меньшие $-\frac{1}{2}$, и обозначим

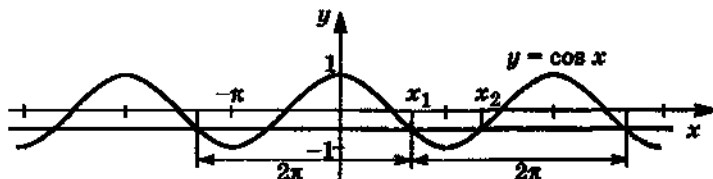


Рис. 96

границы промежутка абсцисс выбранной части графика как x_1 и x_2 (рис. 96). Тогда

$$\cos x_1 = \cos x_2 = -\frac{1}{2}, \quad x_1 = \frac{2\pi}{3}, \quad x_2 = \frac{4\pi}{3}.$$

Для всех x из промежутка $\frac{2\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{3}$ неравенство $\cos x < -\frac{1}{2}$ справедливо. Любой из промежутков, состоящих из решений неравенства $\cos x < -\frac{1}{2}$, отстоит от данного промежутка на целое число периодов: $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{4\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}^1$. В виде такого двойного неравенства и записывают обычно множество всех решений неравенства $\cos x < -\frac{1}{2}$.

Вернемся теперь к переменной φ :

$$\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < 3\varphi - \frac{\pi}{4} < \frac{4\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + 2\pi n < 3\varphi < \frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\frac{11\pi}{12} + 2\pi n < 3\varphi < \frac{19\pi}{12} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\frac{11\pi}{36} + \frac{2}{3}\pi n < \varphi < \frac{19\pi}{36} + \frac{2}{3}\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{11\pi}{36} + \frac{2}{3}\pi n < \varphi < \frac{19\pi}{36} + \frac{2}{3}\pi n,$$

$n \in \mathbb{Z}$.

Примечание. Для решения простейшего неравенства $\cos x < -\frac{1}{2}$ можно было использовать тригонометрическую окружность (рис. 97).

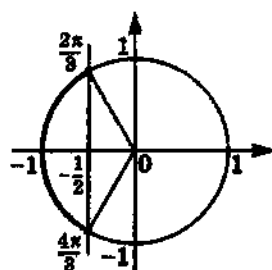


Рис. 97

¹ Буквой $\mathbb{Z}$ обозначают множество целых чисел, поэтому запись « $n \in \mathbb{Z}$ » (n — элемент множества $\mathbb{Z}$) часто используется в том же смысле, что и « n — любое целое число».

Упражнения

302. По графику функции $y = \cos x$ ответьте на вопросы и выполните задания.

1) Промежутку возрастания или убывания принадлежит точка: а) $\frac{13\pi}{6}$; б) $-\frac{5\pi}{6}$; в) 5?

2) Укажите какое-нибудь значение $x > 4$, принадлежащее одновременно и промежутку возрастания, и промежутку убывания.

3) Как по графику определить четность функции?

4) Назовите наибольшее и наименьшее значения функции.

5) Назовите несколько значений аргумента, при которых функция $y = \cos x$ принимает значение, равное 1, -1. Задайте общей формулой корни уравнения $|\cos x| = 1$.

6) Решите уравнение $\cos x = 0$.

7) Найдите приближенные значения:

а) $\cos \frac{\pi}{3}$; б) $\cos(-3)$; в) $\cos 1$; г) $\cos \frac{5\pi}{6}$.

303. Постройте график функции $y = \cos x$ и выделите цветным карандашом одного цвета те его точки, ординаты которых положительны, а другим цветом — точки с отрицательными ординатами.

• На каких промежутках функция $y = \cos x$ принимает положительные значения и на каких — отрицательные?

304. Постройте график функции $y = \cos x$ на промежутке от 0 до 2π , взяв за единицу 2,5 см. Выделите цветными карандашами те точки графика, ординаты которых:

1) равны: 0 ; $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

2) больше: $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) меньше: $\frac{1}{2}$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

• Каковы абсциссы выделенных точек?

305°. Сравните значения:

1) $\cos 0,8\pi$ и $\cos 0,7\pi$; 3) $\cos \frac{15\pi}{8}$ и $\cos \frac{11\pi}{5}$;

2) $\cos \frac{11\pi}{9}$ и $\cos \frac{7\pi}{6}$; 4) $\cos 218^\circ$ и $\sin 230^\circ$.

306⁰. Решите неравенство:

1) $\cos x < 1$; 3) $\cos x < -\sqrt{2}$;

2) $\cos x > -1$; 4) $\cos x > \sqrt{3}$.

307. Постройте график функции $y = \cos x$ и проведите несколько его осей симметрии.

• Напишите общий вид уравнения оси симметрии графика функции $y = \cos x$.

308. Постройте график функции $y = \cos x$ и укажите несколько центров симметрии этого графика.

• Укажите общий вид абсцисс центров симметрии графика функции $y = \cos x$.

309⁰. Докажите, что число π является периодом функции:

1) $y = \operatorname{tg} x$; 2) $y = \operatorname{ctg} x$.

310⁰. Укажите наибольшее и наименьшее значения выражения:

1) $\frac{1 - \cos x}{5}$; 2) $\frac{2 - 5 \cos x}{10}$; 3) $\frac{1}{2 + \cos x}$; 4) $\frac{1}{3 - 2 \cos x}$.

311⁰. В одной системе координат постройте графики функций:

1) $y = \cos x$; 3) $y = \cos 2x$;

2) $y = \frac{1}{2} \cos x$; 4) $y = \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$.

Укажите наименьшие периоды данных функций.

312⁰. 1) С помощью каких преобразований графика функции $y = \sin x$ можно получить график функции $y = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$?

2) С помощью каких преобразований графика функции $y = \cos x$ можно получить график функции

$$y = \frac{1}{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right)?$$

313⁰. Найдите наименьший период функции:

1) $y = \cos 2x$; 2) $y = \sin \frac{x}{2}$.

314[°]. Выберите: а) четные; б) нечетные функции:

- 1) $y = \cos^3 x$; 4) $y = \cos^3 x + \sin^5 x$;
2) $y = \sin \frac{x}{8}$; 5) $y = \frac{\sin^2 x + \cos^7 x + 1}{\sin^4 x}$;
3) $y = \sin x + \cos x$; 6) $y = 3 \cos^5 x + \sin^6 x$.

315. Используя графики, решите неравенства:

- 1) $\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $2 \sin x > -1$;
2) $\cos x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $-2 \cos x > \sqrt{2}$.

316[°]. Решите неравенства:

- 1) $2 \sin 2x - 1 > 0$; 3) $\sin \left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4} \right) > 0$;
2) $2 \sin \left(3x + \frac{\pi}{2} \right) < -1$; 4) $-2 \cos \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) < \sqrt{2}$.

Контрольные вопросы и задания

1. Постройте график функции $y = \cos x$ и перечислите ее основные свойства.

2. Сравните значения $\cos \frac{7\pi}{6}$ и $\cos \frac{5\pi}{6}$.

3. Найдите по графику функции $y = \cos x$ следующие значения: $\cos 1$, $\cos 2,5$ и $\cos (-2)$.

20. Свойства и графики функций **$y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$**

Область определения функции $y = \operatorname{tg} x$ включает в себя все числа, кроме чисел вида $\frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Как и при построении синусоиды, сначала постараемся получить график функции $y = \operatorname{tg} x$ на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2} \right)$.

В левом конце этого промежутка тангенс равен нулю, а при приближении к правому концу значения тангенса неограниченно увеличиваются (рис. 98). Графически это выглядит так, как будто график функции $y = \operatorname{tg} x$ прижимается к прямой $x = \frac{\pi}{2}$, уходя вместе с ней неограниченно вверх.

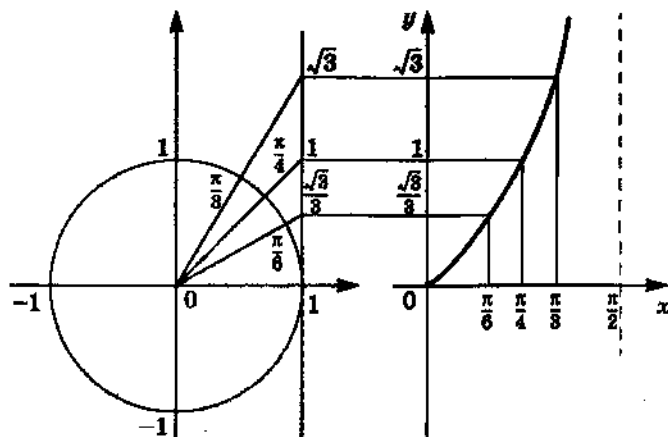


Рис. 98

Мы уже встречались с таким свойством графика функции $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$): при приближении аргумента x к нулю кривая как бы прижимается к оси ординат, а при увеличении аргумента — к оси абсцисс (рис. 99). Ось абсцисс называют *горизонтальной асимптотой*, а ось ординат — *вертикальной асимптотой* графика функции $y = \frac{k}{x}$.

Аналогично, прямая $x = \frac{\pi}{2}$ — вертикальная асимптота графика функции $y = \operatorname{tg} x$.

▼ Несколько сложнее выяснить, как выглядит график функции $y = \operatorname{tg} x$ при приближении точек к началу координат.

Здесь нам снова придет на помощь ось тангенсов. На рисунке 100 с последовательным увеличением показана зона точки касания оси тангенсов и тригонометрической окружности (каждый следующий рисунок увеличивает ту часть предыдущего, которая находится внутри прямоугольной рамки).

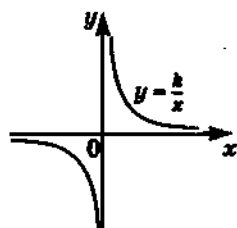


Рис. 99

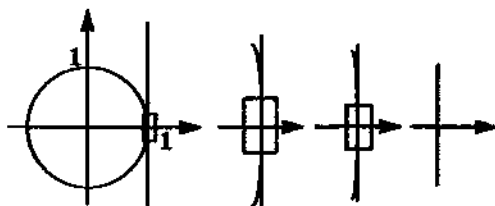


Рис. 100

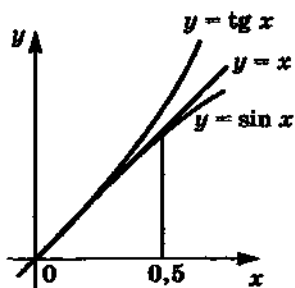


Рис. 101

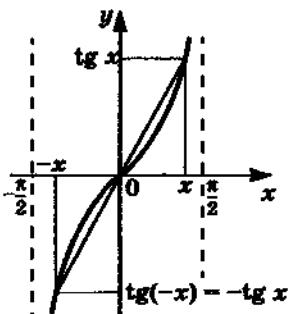


Рис. 102

Мы видим, что при достаточно большом увеличении дуга окружности в зоне точки касания сливается с касательной. Это значит, что при достаточно малых значениях x имеем практически $\operatorname{tg} x \approx x$. Поэтому график функции $y = \operatorname{tg} x$ при малых значениях x сливается с прямой $y = x$. То же самое, кстати, происходит и с графиком функции $y = \sin x$. На рисунке 101 изображены части графиков функций $y = \operatorname{tg} x$, $y = x$ и $y = \sin x$. Δ

Получить график функции $y = \operatorname{tg} x$ на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ можно с помощью равенства $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$, говорящего о симметрии графика относительно начала координат (рис. 102).

И наконец, равенство

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + \pi n) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

позволяет размножить построенную на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ часть графика, сдвигая ее вдоль оси абсцисс на π , 2π , 3π и т. д. влево и вправо (рис. 103).

График функции $y = \operatorname{tg} x$ называют *тангенсоидой*.

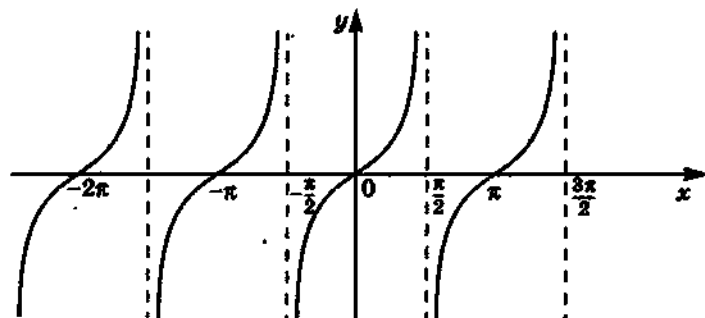


Рис. 103

Основные свойства функции $y = \operatorname{tg} x$

1. Аргумент функции может принимать любые значения, кроме $\frac{\pi}{2} + \pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$).

2. Функция может принимать любые значения.

3. Функция $y = \operatorname{tg} x$ нечетная, так как для любого значения x из области определения $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$.

График функции $y = \operatorname{tg} x$ симметричен относительно начала координат.

4. Функция $y = \operatorname{tg} x$ периодическая. Ее наименьшим периодом является число π .

5. Функция возрастает на интервалах $(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n)$ ($n \in \mathbb{Z}$). Так, при $n = 0$ получаем промежуток возрастания $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, а при $n = 1$ — промежуток $(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2})$.

6. Функция $y = \operatorname{tg} x$ принимает значение, равное нулю, при $x = \pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$).

7. График функции $y = \operatorname{tg} x$ имеет вертикальные асимптоты, уравнения которых имеют вид $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$).

Получить график функции $y = \operatorname{ctg} x$ проще всего с помощью преобразования тангенсоиды, поскольку $\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{2})$. При этом сначала, сдвигая график функции $y = \operatorname{tg} x$ вдоль оси абсцисс на $\frac{\pi}{2}$ вправо, получаем график функции $y = \operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{2})$, а затем выполняем симметрию полученного графика относительно оси абсцисс. В результате получается график функции $y = \operatorname{ctg} x$ (рис. 104).

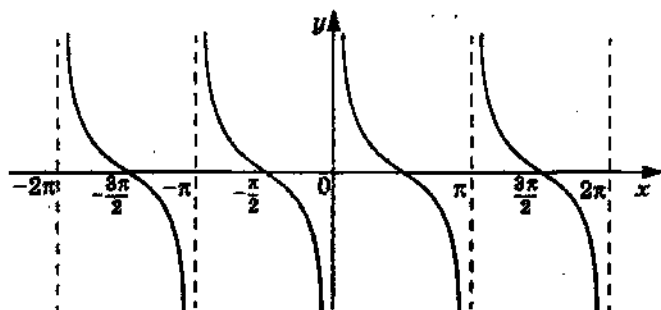


Рис. 104

Пример 1. Сравнить $\operatorname{tg} 8$ и $\operatorname{tg} 12$.

Решение. Приведем данные тангенсы к углам от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$:

$$\operatorname{tg} 8 = \operatorname{tg} (8 - 3\pi), \quad \operatorname{tg} 12 = \operatorname{tg} (12 - 4\pi).$$

Сравним $8 - 3\pi$ и $12 - 4\pi$:

$$8 - 3\pi - (12 - 4\pi) = \pi - 4 < 0,$$

значит,

$$8 - 3\pi < 12 - 4\pi.$$

Поскольку на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает, имеем

$$\operatorname{tg} 8 = \operatorname{tg} (8 - 3\pi) < \operatorname{tg} (12 - 4\pi) = \operatorname{tg} 12.$$

Ответ: $\operatorname{tg} 8 < \operatorname{tg} 12$.

Пример 2. Найти наименьший период функции

$$f(x) = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x.$$

Решение. Чтобы найти наименьший период функции $f(x)$, заметим, что ее область определения включает в себя все числа, кроме $\frac{\pi n}{2}$ ($n \in \mathbb{Z}$). Поэтому для любого положительного T , меньшего, чем $\frac{\pi}{2}$, требование 1) из определения периода не выполняется ($x = \frac{\pi}{2} - T$ входит в область определения, а $x + T = \left(\frac{\pi}{2} - T\right) + T = \frac{\pi}{2}$ — не входит). С другой стороны, для $T = \frac{\pi}{2}$ значения x , $x - T$ и $x + T$ одновременно входят (или не входят) в область определения.

При любом значении x из области определения $f(x)$ имеем $f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = f(x) = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Таким образом, наименьшим периодом функции $f(x) = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x$ является $\frac{\pi}{2}$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}$.

Упражнения

317. Верно ли утверждение?

1) Функции $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ нечетные.

2) Большему значению аргумента соответствует большее значение тангенса. Рассмотрите данное утверждение при следующих значениях аргумента:

$$x_1 = \frac{\pi}{3}; \quad x_2 = \pi; \quad x_3 = \frac{2\pi}{3}; \quad x_4 = 2\pi.$$

3) Большему значению аргумента соответствует меньшее значение котангенса. Рассмотрите данное утверждение при следующих значениях аргумента:

$$x_1 = \frac{\pi}{3}; \quad x_2 = \pi; \quad x_3 = \frac{2\pi}{3}; \quad x_4 = 2\pi.$$

318. Выполните задания, используя график функции $y = \operatorname{tg} x$.

1) Найдите приближенные значения:

а) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{6}$; б) $\operatorname{tg} 1$; в) $\operatorname{tg} 2$; г) $\operatorname{tg} (-1)$.

2) Сравните значения:

а) $\operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{7}\right)$ и $\operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{8}\right)$; в) $\operatorname{tg} 1$ и $\operatorname{tg} 2$.

б) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}$ и $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{8}$;

3) Запишите промежутки, на которых функция $y = \operatorname{tg} x$ принимает: а) положительные значения; б) отрицательные значения.

319. Выполните задания, используя график функции $y = \operatorname{ctg} x$.

1) Найдите приближенные значения:

а) $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{6}$; б) $\operatorname{ctg} 1$; в) $\operatorname{ctg} 2$; г) $\operatorname{ctg} (-1)$.

2) Сравните значения:

а) $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{11}$ и $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{12}$; б) $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{7}$ и $\operatorname{ctg} \frac{8\pi}{7}$; в) $\operatorname{ctg} 1$ и $\operatorname{ctg} 2$.

3) Запишите промежутки, на которых функция $y = \operatorname{ctg} x$ принимает: а) положительные значения; б) отрицательные значения.

320. Постройте график функции $y = \operatorname{tg} x$ и выделите разными цветами те точки графика, ординаты которых:

- 1) равны 1, больше 1, меньше 1;
- 2) равны -2, больше -2, меньше -2.

Запишите абсциссы выделенных точек.

321. Постройте график функции $y = \operatorname{ctg} x$ и выделите разными цветами те точки графика, ординаты которых:

- 1) равны 1, больше 1, меньше 1;
- 2) равны -3, больше -3, меньше -3.

Запишите абсциссы выделенных точек.

322^o. Решите графически неравенство:

- 1) $\operatorname{tg} x < \sqrt{3}$; 3) $\operatorname{tg} x < -1$; 5) $\operatorname{tg} x > 3$;
- 2) $\operatorname{tg} x > -\sqrt{3}$; 4) $\operatorname{ctg} x < \frac{\sqrt{3}}{3}$; 6) $\operatorname{ctg} x \leq -3$.

323. Докажите, что:

- 1) $\operatorname{tg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \operatorname{tg} \frac{5\pi}{4}$; 2) $\operatorname{tg}(\alpha + \pi) = \operatorname{tg}(\alpha - 2\pi)$.

324. Установите, какие из следующих функций четные, какие нечетные, а какие не являются ни четными, ни нечетными:

- 1) $y = x + \sin x$; 5) $y = \operatorname{tg} x \cdot |x|$;
- 2) $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$; 6) $y = \cos \frac{x^2 - x}{x - 1}$;
- 3) $y = x^2 \cos x$; 7) $y = \operatorname{ctg} x - \cos x$;
- 4) $y = \operatorname{tg}^2 x + \sin x$; 8) $y = \sin \frac{x^{23} - x^{21}}{x^2 - 1}$.

325^o. С помощью каких преобразований из графика функции $y = \operatorname{tg} x$ можно получить графики функций $y = \operatorname{tg} x + 2$ и $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$? Постройте в одной системе координат графики функций:

$$y = \operatorname{tg} x, \quad y = \operatorname{tg} x + 2 \quad \text{и} \quad y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

326^o. Как с помощью преобразований графика функции $y = \operatorname{ctg} x$ получить графики функций:

- 1) $y = \operatorname{ctg} x - 1$; 2) $y = \operatorname{ctg}(-x)$; 3) $y = \operatorname{ctg}(x - 1)$?

327^o. Сравните с помощью графика:

- 1) $\operatorname{tg} 1$ и $\operatorname{tg} 2$; 4) $\operatorname{ctg} (-2)$ и $\operatorname{ctg} (-3)$;
2) $\operatorname{tg} (-1)$ и $\operatorname{tg} (-2)$; 5) $\operatorname{tg} 3$ и $\operatorname{ctg} 3$;
3) $\operatorname{ctg} 2$ и $\operatorname{ctg} 3$; 6) $\operatorname{ctg} 1$ и $\cos 1$.

328^o. Постройте график функции:

- 1) $y = |\operatorname{tg} x|$; 2) $y = |\operatorname{ctg} x|$; 3) $y = \operatorname{tg} |x|$.

Является ли данная функция периодической?

329. Найдите корни уравнения:

1) $\operatorname{tg} x = 1$ на промежутке:

- а) $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$; б) $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$; в) $(2\pi; 4\pi)$;

2) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$ на промежутке:

- а) $(0; \pi)$; б) $(\pi; 2\pi)$; в) $(2\pi; 4\pi)$;

3) $\operatorname{tg} x = 2$ на промежутке:

- а) $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$; б) $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$; в) $(2\pi; 4\pi)$.

330. При каких значениях x выполняется равенство:

- 1) $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x$; 2) $\operatorname{tg} x = -\operatorname{ctg} x$; 3) $|\operatorname{tg} x| = |\operatorname{ctg} x|$?

331. Укажите, если возможно, промежутки возрастания следующих функций:

- 1) $y = \sin x$; 2) $y = \operatorname{tg} x$; 3) $y = \sqrt{x}$;
4) $y = \operatorname{ctg} x$; 5) $y = x^3$; 6) $y = 2x + 3$.

332^o. Найдите промежутки возрастания и промежутки убывания функции:

- 1) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$; 3) $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;
2) $y = \sin \frac{x}{2}$; 4) $y = \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

333^o. Найдите наименьший период функции:

- 1) $y = \operatorname{tg} 2x$; 3) $y = \operatorname{ctg}^2 x$;
2) $y = \operatorname{tg}^2 x$; 4) $y = \frac{1}{\sin^2 x}$.

334^o. На промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ решите графически неравенство:

- 1) $\operatorname{tg} x < x$; 2) $\operatorname{tg} x > 1 - x^2$.

Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте основные свойства функции $y = \operatorname{ctg} x$. Какие из этих свойств имеет функция $y = \operatorname{tg} x$?

2. С помощью каких преобразований графика функции $y = \operatorname{tg} x$ можно получить график функции $y = -\operatorname{tg}(2x - \pi)$?

21. Зависимости между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

Равенства $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$ и $\operatorname{ctg} \varphi = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}$ выражают соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента φ . С их помощью, зная синус и косинус некоторого угла, можно найти его тангенс и котангенс. Из этих равенств легко получить, что тангенс и котангенс связаны между собой равенством

$$\operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{ctg} \varphi = 1.$$

Познакомимся с некоторыми другими зависимостями между тригонометрическими функциями.

Уравнение единичной окружности с центром в начале координат $x^2 + y^2 = 1$ связывает абсциссу и ординату любой точки этой окружности. Значит,

$$\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1.$$

Это равенство, верное при любых значениях φ , называют *основным тригонометрическим тождеством*.

Основное тригонометрическое тождество часто используется при преобразовании тригонометрических выражений.

Пример 1. Упростить выражение $(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)$.

Решение. $(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha) = 1 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha$.

Здесь мы заменили единицу суммой квадратов синуса и косинуса.

Полезно запомнить, что

$$1 - \sin^2 \varphi = \cos^2 \varphi, \quad 1 - \cos^2 \varphi = \sin^2 \varphi.$$

Эти равенства, получающиеся из основного тригонометрического тождества, также являются тождествами.

Разделив почленно основное тригонометрическое тождество на $\cos^2 \varphi$, получим:

$$\frac{\cos^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} + \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{1}{\cos^2 \varphi}, \text{ т. е.}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{1}{\cos^2 \varphi}.$$

Аналогично, делением основного тригонометрического тождества на $\sin^2 \varphi$ получаем

$$\operatorname{ctg}^2 \varphi + 1 = \frac{1}{\sin^2 \varphi}.$$

Зависимости между тригонометрическими функциями позволяют по значению одной из функций находить значения остальных тригонометрических функций при том же значении аргумента.

Пример 2. Найти $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$, если известно, что $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Решение. Из равенства $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$ получаем

$$|\cos \alpha| = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}.$$

Условие $\frac{\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ говорит о том, что α может являться углом II, III или IV четверти. Однако синус угла α в данной задаче положителен, значит, α — угол II четверти.

Косинусы углов II четверти отрицательны, поэтому

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}.$$

Подставим в это равенство данное в условии значение $\sin \alpha$:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \\ &= -\sqrt{1 - \frac{25}{169}} = -\sqrt{\frac{144}{169}} = -\frac{12}{13}. \end{aligned}$$

$$\text{Далее имеем: } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}} = -\frac{5}{12}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = -\frac{12}{5}.$$

$$\text{О т в е т: } \cos \alpha = -\frac{12}{13}, \operatorname{tg} \alpha = -\frac{5}{12}, \operatorname{ctg} \alpha = -\frac{12}{5}.$$

Пример 3. Найти $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{8}{15}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Решение. Можно сразу найти $\operatorname{ctg} \alpha$: $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{15}{8}$.

Из равенства $1 + \operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{1}{\cos^2 \varphi}$ следует, что

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{1 + \frac{64}{225}} = \frac{225}{289}.$$

Поскольку в данной задаче $\frac{\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ и $\operatorname{tg} \alpha$ положителен, то α является углом III четверти (тангенсы углов II и IV четвертей отрицательны).

Учитывая, что косинусы углов III четверти отрицательны, получаем:

$$\cos \alpha = -\sqrt{\frac{225}{289}} = -\frac{15}{17}.$$

Найдем $\sin \alpha$ из равенства $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$:

$$\sin \alpha = \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha = -\frac{15}{17} \cdot \frac{8}{15} = -\frac{8}{17}.$$

Ответ: $\sin \alpha = -\frac{8}{17}$, $\cos \alpha = -\frac{15}{17}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{15}{8}$.

Пример 4. Доказать тождество

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \cos^2 \alpha \cdot \operatorname{ctg}^2 \alpha.$$

Решение. Преобразуем левую часть равенства:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg}^2 \alpha - \cos^2 \alpha &= \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} - \cos^2 \alpha = \cos^2 \alpha \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1 \right) = \\ &= \cos^2 \alpha \left(\frac{1 - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \right) = \cos^2 \alpha \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \cos^2 \alpha \cdot \operatorname{ctg}^2 \alpha, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Упражнения

335. Могут ли синус и косинус одного и того же аргумента быть равными соответственно:

- 1) $\frac{5}{13}$ и $\frac{12}{13}$; 2) $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ и $\frac{-b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ($|a| + |b| \neq 0$)?

336. Найдите значения тригонометрических функций угла α , если:

1) $\sin \alpha = \frac{56}{65}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

2) $\sin \alpha = \frac{80}{89}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

3) $\cos \alpha = -\frac{12}{37}$ и $0 < \alpha < \pi$;

4) $\cos \alpha^\circ = -\frac{40}{41}$ и $180^\circ < \alpha^\circ < 360^\circ$;

5) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{24}{7}$ и $\pi < \alpha < 2\pi$;

6) $\operatorname{tg} \alpha^\circ = -\frac{11}{60}$ и $180^\circ < \alpha^\circ < 360^\circ$;

7) $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{5}{12}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

8) $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{12}{35}$ и $\pi < \alpha < 2\pi$.

337. Упростите выражение:

1) $1 - \sin^2 \alpha$;

9) $\frac{\operatorname{tg}^2 \beta - \sin^2 \beta}{\operatorname{ctg}^2 \beta - \cos^2 \beta}$;

2) $\cos^2 \beta - 1$;

10) $\frac{\sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} \cdot \operatorname{ctg} \alpha$;

3) $\cos \alpha \operatorname{tg} \alpha$;

11) $\frac{\sin \beta}{1 - \cos \beta} + \frac{\sin \beta}{1 + \cos \beta}$;

4) $\sin \alpha \operatorname{ctg} \alpha$;

12) $\frac{\cos \beta}{1 - \sin \beta} + \frac{\cos \beta}{1 + \sin \beta}$;

5) $\frac{\cos^2 \beta}{1 + \sin \beta}$;

13) $\frac{\sin \beta}{1 + \cos \beta} + \operatorname{ctg} \beta$;

6) $\frac{1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}$;

14) $\frac{\cos \beta}{1 - \sin \beta} - \operatorname{tg} \beta$;

7) $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha$;

15) $\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} + \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}}$;

8) $(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)$;

16) $\sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}} + \sqrt{\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}}$.

338°. Найдите значение выражения:

- 1) $\frac{4\sin\alpha - 5\cos\alpha}{2\sin\alpha - \cos\alpha}$ при $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}$;
- 2) $\frac{5\sin\alpha + 2\cos\alpha}{3\sin\alpha - 4\cos\alpha}$ при $\operatorname{tg}\alpha = -0,4$.

339. Докажите тождество:

- 1) $\frac{\sin\varphi}{1 + \cos\varphi} = \frac{1 - \cos\varphi}{\sin\varphi}$;
- 2) $\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha - 1}{\operatorname{tg}\alpha + 1}$;
- 3) $\sin^4\beta + \sin^2\beta \cos^2\beta + \cos^2\beta = 1$;
- 4) $\sin^2\alpha + \sin^2\alpha \cos^2\alpha + \cos^4\alpha = 1$;
- 5) $\cos^2\alpha + \cos^2\alpha \operatorname{ctg}^2\alpha = \operatorname{ctg}^2\alpha$;
- 6) $\sin^2\alpha + \sin^2\alpha \operatorname{tg}^2\alpha = \operatorname{tg}^2\alpha$;
- 7) $1 + \sin x + \cos x + \operatorname{tg} x = (1 + \cos x)(1 + \operatorname{tg} x)$;
- 8) $1 + \cos\beta - \sin\beta - \operatorname{tg}\beta = (1 + \cos\beta)(1 - \operatorname{tg}\beta)$;
- 9) $\frac{\sin^3\alpha + \cos^3\alpha}{1 - \sin\alpha\cos\alpha} = \sin\alpha + \cos\alpha$;
- 10) $\frac{\cos^3\alpha - \sin^3\alpha}{1 + \cos\alpha\sin\alpha} = \cos\alpha - \sin\alpha$;
- 11) $\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} - \frac{1}{\sin^2\alpha}$;
- 12) $(\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha) \operatorname{ctg}^2\alpha = \sin^2\alpha$;
- 13) $\frac{1 + 2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + 1}{\operatorname{tg}\alpha - 1}$;
- 14) $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1 - 2\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$.

340. Упростите выражение:

- 1) $\sin 165^\circ + \cos 195^\circ \operatorname{ctg} 255^\circ$;
- 2) $\cos 320^\circ - \sin 220^\circ \operatorname{tg} 130^\circ$;
- 3) $\operatorname{tg} 110^\circ \operatorname{tg} 100^\circ \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{ctg} 70^\circ \operatorname{ctg} 80^\circ$;
- 4) $\operatorname{ctg} 135^\circ \operatorname{ctg} 125^\circ \operatorname{ctg} 115^\circ \operatorname{ctg} 35^\circ \operatorname{ctg} 25^\circ$;
- 5) $\frac{\operatorname{tg} 205^\circ}{1 - \operatorname{ctg}^2 155^\circ} \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 65^\circ - \operatorname{tg} 45^\circ}{\operatorname{ctg} 295^\circ}$;
- 6) $\frac{\operatorname{tg} 144^\circ}{1 + \operatorname{tg}^2 216^\circ} : \frac{\operatorname{tg}^2 126^\circ}{1 + \operatorname{ctg}^2 324^\circ}$.

341[○]. Решите уравнение:

1) $(\sin x + \cos x)^2 - 1 = 0$;

2) $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin x \cos x$;

3) $8 \sin^2 x - 18 \sin x + 7 = 0$;

4) $4 \cos^2 x - 4 \cos x - 3 = 0$;

5)[●] $3 \sin x = 2 \cos^2 x$;

6) $(\sin x + 1)^2 = \sin^2 x + 1$;

7) $\cos^2 x + \cos x = -\sin^2 x$;

8)[●] $3 \cos x = -2 \sin x$;

9)* $\sin x + \cos x = 1,4$;

10)* $\sin x - \cos x = \frac{7}{18}$.

342[○]. Докажите, что значение выражения

$$(a \sin x + b \cos x)^2 + (b \sin x - a \cos x)^2$$

не зависит от значения переменной x .

343[●]. Известно, что $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 3$. Найдите:

1) $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha$; 2) $\operatorname{tg}^4 \alpha + \operatorname{ctg}^4 \alpha$.

344[○]. Известно, что α — угол I четверти. Могут ли при одном и том же α оказаться верными неравенства:

1) $\sin \alpha < \frac{1}{2}$ и $\cos \alpha < \frac{1}{2}$; 2) $\operatorname{tg} \alpha < 2$ и $\operatorname{ctg} \alpha < 2$?

345[●]. Докажите, что для любого острого угла:

1) сумма его синуса и косинуса больше 1;

2) сумма его тангенса и котангенса не меньше 2.

Контрольные вопросы и задания

1. Как, зная синус угла, найти тангенс этого угла? Как решить обратную задачу: зная тангенс угла, найти синус этого угла?

2. Найдите $\sin \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$, если $\cos \alpha = -\frac{15}{17}$ и α — угол III четверти.

3. Упростите выражение $\frac{\cos^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} \cdot \operatorname{tg} \alpha$.

4. Найдите значение выражения:

а) $\lg \operatorname{tg} 3^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 6^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 9^\circ \cdot \dots \cdot \lg \operatorname{tg} 87^\circ$;

б) $\lg \operatorname{tg} 3^\circ + \lg \operatorname{tg} 6^\circ + \lg \operatorname{tg} 9^\circ + \dots + \lg \operatorname{tg} 87^\circ$.

22. Синус и косинус суммы и разности двух углов

Точки $P_{\alpha+\beta}$, P_α и $P_{-\beta}$ — конечные точки поворотов на углы $\alpha + \beta$, α и $-\beta$ (рис. 105). Хорда $P_{\alpha+\beta}P_0$ единичной окружности при повороте на угол $-\beta$ вокруг начала координат совпадает с хордой $P_\alpha P_{-\beta}$, значит, длины отрезков $P_{\alpha+\beta}P_0$ и $P_\alpha P_{-\beta}$ равны.

Выразим длины этих отрезков, используя формулу расстояния между точками $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ координатной плоскости:

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Подставляя в эту формулу координаты точек P_0 , $P_{\alpha+\beta}$, P_α , $P_{-\beta}$, получим:

$$P_0 P_{\alpha+\beta} = \sqrt{(\cos(\alpha + \beta) - 1)^2 + (\sin(\alpha + \beta) - 0)^2},$$

$$P_\alpha P_{-\beta} = \sqrt{(\cos \alpha - \cos(-\beta))^2 + (\sin \alpha - \sin(-\beta))^2}.$$

Так как длины отрезков равны, то

$$\begin{aligned} \sqrt{(\cos(\alpha + \beta) - 1)^2 + \sin^2(\alpha + \beta)} &= \\ &= \sqrt{(\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha + \sin \beta)^2}. \end{aligned}$$

Возведем обе части этого равенства в квадрат:

$$\begin{aligned} (\cos(\alpha + \beta) - 1)^2 + \sin^2(\alpha + \beta) &= \\ &= (\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha + \sin \beta)^2. \end{aligned}$$

Преобразуем левую часть полученного равенства:

$$\begin{aligned} (\cos(\alpha + \beta) - 1)^2 + \sin^2(\alpha + \beta) &= \\ &= \cos^2(\alpha + \beta) - 2 \cos(\alpha + \beta) + 1 + \\ &+ \sin^2(\alpha + \beta) = 2 - 2 \cos(\alpha + \beta). \end{aligned}$$

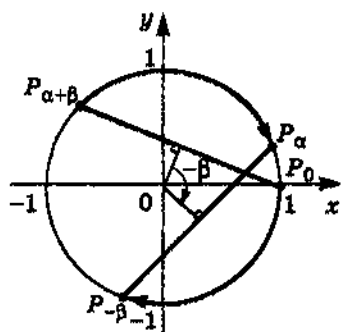


Рис. 105

Теперь преобразуем правую часть равенства:

$$\begin{aligned} & (\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha + \sin \beta)^2 = \\ & = \cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \sin \beta + \sin^2 \beta = \\ & = 2 - 2 (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$2 - 2 \cos (\alpha + \beta) = 2 - 2 (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta).$$

Отсюда

$$\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

Это равенство является тождеством. Его называют *формулой косинуса суммы*.

Заменяя в этой формуле β на $-\beta$:

$$\cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos (-\beta) - \sin \alpha \sin (-\beta),$$

получим *формулу косинуса разности*:

$$\cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

С помощью формул приведения выведем *формулу синуса суммы*:

$$\begin{aligned} \sin (\alpha + \beta) &= \cos \left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta) \right) = \cos \left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) - \beta \right) = \\ &= \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \cos \beta + \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \sin \beta = \\ &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta. \end{aligned}$$

Итак,

$$\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

Заменяя в этой формуле β на $-\beta$:

$$\sin (\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos (-\beta) + \cos \alpha \sin (-\beta),$$

получим *формулу синуса разности*:

$$\sin (\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta.$$

П р и м е р 1. Доказать тождество

$$\frac{\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)}{\sin (\alpha + \beta) - \sin \alpha \cos \beta} = 2 \operatorname{tg} \alpha.$$

Доказательство. Преобразуем левую часть равенства:

$$\frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta) - \sin\alpha\cos\beta} =$$

$$= \frac{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta} = \frac{2\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\sin\beta} = 2 \operatorname{tg} \alpha,$$

что и требовалось доказать.

Пример 2. Упростить выражение

$$\frac{\cos 75^\circ \cos 65^\circ - \sin 75^\circ \sin 65^\circ}{\sin 85^\circ \cos 35^\circ - \cos 85^\circ \sin 35^\circ}.$$

В числителе дроби замечаем правую часть формулы косинуса суммы, а в знаменателе — синуса разности:

$$\frac{\cos 75^\circ \cos 65^\circ - \sin 75^\circ \sin 65^\circ}{\sin 85^\circ \cos 35^\circ - \cos 85^\circ \sin 35^\circ} = \frac{\cos(75^\circ + 65^\circ)}{\sin(85^\circ - 35^\circ)} =$$

$$= \frac{\cos 140^\circ}{\sin 50^\circ} = \frac{\cos(90^\circ + 50^\circ)}{\sin 50^\circ} = \frac{-\sin 50^\circ}{\sin 50^\circ} = -1.$$

Упражнения

346⁰. Найдите длину хорды единичной окружности:

1) $P_0 P_{\frac{\pi}{2}}$; 2) $P_{\frac{\pi}{2}} P_{2\pi}$; 3) $P_0 P_{-\frac{\pi}{2}}$; 4) $P_\alpha P_\beta$.

347. Преобразуйте выражение, используя формулы синуса и косинуса суммы и разности:

1) $\cos(\alpha^\circ + 70^\circ)$; 6) $\cos\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right)$; 11) $\cos\left(\varphi - \frac{3\pi}{2}\right)$;

2) $\cos(20^\circ + \beta^\circ)$; 7) $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$; 12) $\cos\left(\frac{5\pi}{4} + \beta\right)$;

3) $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$; 8) $\sin\left(\frac{3\pi}{4} + \alpha\right)$; 13) $\cos(\alpha - \beta)$;

4) $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \beta\right)$; 9) $\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)$; 14) $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$;

5) $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \gamma\right)$; 10) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \beta\right)$; 15) $\sin\left(\beta + \frac{\pi}{3}\right)$.

348. Найдите:

1) $\sin(\alpha + \beta)$, если $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\sin \beta = \frac{24}{25}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ и $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$;

2) $\sin(\alpha - \beta)$, если $\sin \alpha = \frac{20}{29}$, $\cos \beta = \frac{7}{25}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ и $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$;

3) $\cos(\alpha + \beta)$, если $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$, $\cos \beta = -\frac{12}{13}$, $0 < \alpha < \pi$ и $0 < \beta < \pi$;

4) $\cos(\alpha - \beta)$, если $\sin \alpha = -\frac{21}{29}$, $\sin \beta = \frac{7}{25}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$;

5) $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$, если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{24}$, $0 < \alpha < \pi$;

6) $\cos\left(\frac{\pi}{8} - \alpha\right)$, если $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{3}{4}$ и $0 < \alpha < \pi$.

349. Используя известные значения синусов и косинусов углов 30° , 45° и 60° , найдите синусы и косинусы углов: 1) 15° ; 2) 75° ; 3) 105° .

350. 1)° Синусы двух углов остроугольного треугольника равны $\frac{5}{13}$ и $\frac{8}{17}$. Найдите синус третьего угла.

2)° Синусы двух углов некоторого треугольника равны 0,5 и 0,6. Каким может быть синус его третьего угла?

Чем отличаются задачи 1) и 2)?

351°. Найдите косинус третьего угла треугольника, если косинусы двух его углов равны:

1) $-\frac{7}{25}$ и $\frac{12}{13}$; 2) 0,8 и $\frac{20}{29}$.

352. Упростите выражения (выявите закономерность на первых двух заданиях и примените ее к остальным):

1) $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$;

2) $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$;

3) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$;

4) $\sin\left(\beta + \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\beta - \frac{\pi}{6}\right)$.

353. Упростите выражения (выявите закономерность на первых двух примерах и примените ее к остальным):

1) $\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$;

2) $\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)$;

3) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$;

4) $\sin\left(\beta + \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\beta - \frac{\pi}{6}\right)$.

• Сравните закономерности, выявленные в заданиях 352 и 353.

354°. Сравните значения выражений:

1) $\frac{\cos 50^\circ \cos 20^\circ - \sin 50^\circ \sin 20^\circ}{\cos 85^\circ \cos 15^\circ + \sin 85^\circ \sin 15^\circ}$ и $\frac{\cos 70^\circ \cos 40^\circ - \sin 70^\circ \sin 40^\circ}{\cos 50^\circ \cos 20^\circ - \sin 50^\circ \sin 20^\circ}$;

2) $\frac{\sin 48^\circ \cos 52^\circ + \sin 52^\circ \cos 48^\circ}{\cos 75^\circ \cos 5^\circ - \sin 5^\circ \sin 75^\circ}$ и $\frac{\cos 75^\circ \cos 85^\circ - \sin 75^\circ \sin 85^\circ}{\sin 32^\circ \cos 12^\circ - \cos 32^\circ \sin 12^\circ}$;

3) $\frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}$ и $\frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)}$.

355°. Упростите выражение:

1) $\frac{\sin 48^\circ - \sin 23^\circ \cos 25^\circ}{\sin 2^\circ + \sin 23^\circ \cos 25^\circ}$; 2) $\frac{\cos 40^\circ + \sin 24^\circ \sin 16^\circ}{\sin 24^\circ \sin 16^\circ - \cos 8^\circ}$.

356. Найдите значение выражения:

1) $\sin 50^\circ \cos 5^\circ - \sin 5^\circ \cos 50^\circ$;

2) $\cos 32^\circ \cos 28^\circ - \sin 32^\circ \sin 28^\circ$;

3) $\sin 85^\circ \cos 65^\circ + \sin 65^\circ \cos 85^\circ$;

4) $\cos 160^\circ \cos 25^\circ + \sin 160^\circ \sin 25^\circ$.

357°. Упростите выражение

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \cos x + \sin 2x \cdot \sin(\pi + x)$$

и укажите все x , при которых его значение равно $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

358°. Укажите наименьшее положительное число x , при котором значение выражения $\cos 30^\circ \cos x^\circ - \sin 30^\circ \sin x^\circ$ равно $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

359°. Докажите тождество:

$$1) \frac{2\sin(\alpha^\circ + 30^\circ) - \cos\alpha^\circ}{2\cos(\alpha^\circ - 30^\circ) - \sqrt{3}\cos\alpha^\circ} = \sqrt{3};$$

$$2) \frac{\sqrt{2}\sin(\beta^\circ - 45^\circ) + \cos\beta^\circ}{\sqrt{2}\cos(\beta^\circ + 45^\circ) + \sin\beta^\circ} = \operatorname{tg} \beta^\circ.$$

360°. Докажите тождество

$$\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta.$$

361. Докажите одну из формул приведения, используя формулы данного пункта.

362°. Докажите, что $\cos 15^\circ - \sin 15^\circ = \sin 45^\circ$.

363°. Докажите, что:

$$1) \text{ если } \sin \alpha = \frac{4\sqrt{3}}{13}, \sin \beta = \frac{11}{13}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ и } 0 < \beta < \frac{\pi}{2}, \text{ то } \alpha + \beta = \frac{\pi}{2};$$

$$2) \text{ если } \sin \alpha = \frac{2}{3}, \cos \beta = -\frac{\sqrt{5}}{3}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ и } \frac{\pi}{2} < \beta < \pi, \text{ то } \alpha + \beta = \pi.$$

364°. Решите уравнение:

$$1) \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x = 0;$$

$$2) \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = 1;$$

$$3) \cos 3x \cos \frac{\pi}{6} + 0,5 = \sin 3x \sin \frac{\pi}{6};$$

$$4) \sin \frac{3\pi}{2} \cos 2x = \cos \frac{3\pi}{2} \sin 2x - 1.$$

Контрольные вопросы и задания

1. Напишите формулу длины отрезка с концами в точках P_α и P_β — конечных точках поворотов на углы α и β . Найдите по этой формуле длину отрезка $P_{\frac{\pi}{2}}P_{\frac{\pi}{6}}$.

2. Найдите $\sin(\alpha + \beta)$, если $\sin \alpha = \frac{40}{41}$, $\cos \beta = -\frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ и $\pi < \beta < 2\pi$.

3. Упростите выражение $\frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}$.

23. Тангенс суммы и тангенс разности двух углов

Тангенс суммы двух углов можно выразить через синусы и косинусы данных углов:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}.$$

Чтобы выразить тангенс суммы двух углов через тангенсы этих углов, разделим числитель и знаменатель дроби на произведение $\cos\alpha\cos\beta$ (если существуют тангенсы углов α и β , то произведение косинусов этих углов отлично от нуля):

$$\frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Значит,

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Заметим, что если $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = 1$, то $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ не существует.

Формулу тангенса разности получаем, заменяя в формуле тангенса суммы β на $-\beta$:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Пример 1. Доказать, что если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{8}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{3}{13}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ и $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, то $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$.

Доказательство. Найдем тангенс суммы углов α и β :

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \frac{\frac{5}{8} + \frac{3}{13}}{1 - \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{13}} = 1.$$

Сложив почленно неравенства $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ и $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, получим $0 < \alpha + \beta < \pi$.

Единственным углом в промежутке от 0 до π , тангенс которого равен 1, является угол $\frac{\pi}{4}$. Значит, $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$, что и требовалось доказать.

Пример 2. Упростить выражение

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)} + \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)}.$$

Решение.
$$\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)} + \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}} + \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{\frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}} =$$
$$= 1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + 1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = 2.$$

Ответ: 2.

Упражнения

365. При $\operatorname{tg} \alpha^\circ = 1,5$ и $\operatorname{tg} \beta = 1,5$ найдите:

- 1) $\operatorname{tg}(\alpha^\circ + 60^\circ)$; 3) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} - \beta\right)$;
2) $\operatorname{tg}(45^\circ - \alpha^\circ)$; 4) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4} + \beta\right)$.

366. Используя известные значения тангенсов углов 30° , 45° и 60° , найдите:

- 1) $\operatorname{tg} 15^\circ$; 2) $\operatorname{tg} 75^\circ$; 3) $\operatorname{tg} 105^\circ$.

367. Найдите: 1) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$; 2) $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$, если:

а) $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{5}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{4}{3}$;

б) $\operatorname{tg} \alpha = 1,2$, $\sin \beta = -0,8$ и $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$;

в) $\sin \alpha = \frac{8}{17}$, $\cos \beta = -\frac{12}{13}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$.

368[°]. Найдите $\operatorname{tg} \beta$, если:

- 1) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right) = 2$; 3) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = 3$ и $\operatorname{tg} \alpha = 2$;
2) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4} - \beta\right) = -2$; 4) $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = 2,5$ и $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{3}$.

369[°]. Найдите тангенс третьего угла треугольника, если тангенсы двух его углов равны:

- 1) $\frac{5}{4}$ и $0,9$; 2) $\frac{1}{3}$ и $0,4$.

370[°]. Тангенсы двух углов треугольника равны $\frac{2}{3}$ и $1,5$.

Найдите третий угол треугольника.

371. Найдите значение выражения:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{\operatorname{tg} 23^{\circ} + \operatorname{tg} 22^{\circ}}{1 - \operatorname{tg} 22^{\circ} \operatorname{tg} 23^{\circ}}; & 3) \frac{1 + \operatorname{tg} 273^{\circ} \operatorname{tg} 63^{\circ}}{\operatorname{tg} 273^{\circ} - \operatorname{tg} 63^{\circ}}; \\ 2) \frac{\operatorname{tg} 73^{\circ} - \operatorname{tg} 43^{\circ}}{1 + \operatorname{tg} 73^{\circ} \operatorname{tg} 43^{\circ}}; & 4) \frac{1 - \operatorname{tg} 161^{\circ} \operatorname{tg} 139^{\circ}}{\operatorname{tg} 161^{\circ} + \operatorname{tg} 139^{\circ}}. \end{array}$$

372. Какое из следующих выражений имеет значение, равное $\frac{1}{\sqrt{3}}$:

$$\begin{array}{l} 1) \sin 23^{\circ} \cos 37^{\circ} - \cos 23^{\circ} \sin 37^{\circ}; \\ 2) \sin 54^{\circ} \cos 24^{\circ} - \cos 54^{\circ} \sin 24^{\circ}; \\ 3) \frac{\operatorname{tg} 18^{\circ} + \operatorname{tg} 12^{\circ}}{1 - \operatorname{tg} 18^{\circ} \operatorname{tg} 12^{\circ}}? \end{array}$$

373. Верно ли, что значение данного выражения равно 1:

$$\begin{array}{l} 1) \sin 126^{\circ} \cos 36^{\circ} - \cos 126^{\circ} \sin 36^{\circ}; \\ 2) \cos 152^{\circ} \cos 28^{\circ} - \sin 152^{\circ} \sin 28^{\circ}; \\ 3) \frac{\operatorname{tg} 14^{\circ} + \operatorname{tg} 81^{\circ}}{1 - \operatorname{tg} 14^{\circ} \operatorname{tg} 81^{\circ}}? \end{array}$$

374. Докажите тождество:

$$\begin{array}{ll} 1) 1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}; & 3) \frac{\operatorname{tg}(\alpha + \beta) - \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}(\alpha + \beta)} = \operatorname{tg} \beta; \\ 2) \frac{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \beta} = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}; & 4) \frac{\operatorname{tg}(\beta - \alpha) \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg}(\alpha - \beta) - \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} = \operatorname{ctg} \alpha. \end{array}$$

375⁰. Решите уравнение:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x} = \sqrt{3}; & 4) \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \operatorname{tg} x} = 0; \\ 2) \frac{\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} x} = -1; & 5) \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} + \operatorname{tg} 2x}{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \operatorname{tg} 2x} = -\frac{\sqrt{3}}{3}; \\ 3) \operatorname{tg} x + 4 \operatorname{ctg} x = 4; & 6) \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 6 = 0. \end{array}$$

376. Докажите одну из формул приведения, воспользовавшись формулами данного пункта.

377^{*}. Упростите выражение:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{\operatorname{tg}^2 50^{\circ} - \operatorname{tg}^2 5^{\circ}}{1 - \operatorname{tg}^2 50^{\circ} \operatorname{tg}^2 5^{\circ}}; & 2) \frac{1 - \operatorname{tg}^2 35^{\circ} \operatorname{tg}^2 25^{\circ}}{\operatorname{tg}^2 35^{\circ} - \operatorname{tg}^2 25^{\circ}}. \end{array}$$

378°. Укажите две пары чисел α и β таких, что $0 < \alpha < \pi$, $0 < \beta < \pi$, причем:

1) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta$; 2) $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta$.

379°. Докажите, что:

1) угол между прямыми $y = 2x$ и $y = \frac{1}{3}x$ равен 45° ;

2) прямые $y = 0,4x$ и $y = -2,5x$ взаимно перпендикулярны. Как связаны между собой угловые коэффициенты k_1 и k_2 двух взаимно перпендикулярных прямых?

Контрольные вопросы и задания

1. Выведите формулу тангенса разности, заменяя тангенс частным синуса и косинуса.

2. Найдите $\operatorname{tg}(135^\circ + \alpha^\circ)$, если $\operatorname{tg} \alpha^\circ = -\frac{1}{3}$.

3. Упростите выражение $\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$.

24. Тригонометрические функции двойного угла

Задача. Тангенс вписанного угла ABC равен $\frac{5}{4}$ (рис. 106). Найти тангенс центрального угла AOC .

Решение. Обозначим величину вписанного угла ABC буквой α , тогда величина центрального угла AOC равна 2α . Для вычисления $\operatorname{tg} 2\alpha$ воспользуемся формулой тангенса суммы:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg}(\alpha + \alpha) = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \cdot \frac{5}{4}}{1 - \left(\frac{5}{4}\right)^2} = -\frac{40}{9}.$$

О т в е т: $-\frac{40}{9}$.

При решении задачи мы получили формулу тангенса двойного угла:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

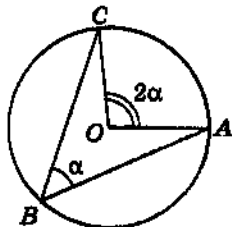


Рис. 106

Подобным же образом из формул синуса и косинуса суммы получаем:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.$$

Пример 1. Найти $\sin 2\alpha$, если $\sin \alpha = \frac{20}{29}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Решение. Учитывая, что α — угол второй четверти, имеем:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \\ &= -\sqrt{1 - \left(\frac{20}{29}\right)^2} = -\sqrt{\frac{29^2 - 20^2}{29^2}} = -\frac{\sqrt{9 \cdot 49}}{29} = -\frac{21}{29}. \end{aligned}$$

Применяя формулу синуса двойного угла, получим:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \frac{20}{29} \cdot \left(-\frac{21}{29}\right) = -\frac{840}{841}.$$

Ответ: $-\frac{840}{841}$.

Косинус двойного угла можно выразить через косинус или через синус одинарного угла:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha,$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1;$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha, \quad \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1.$$

Из формулы косинуса двойного угла можно выразить косинус и синус угла, в 2 раза меньшего:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \quad \text{и} \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}.$$

Эти формулы часто используют для понижения степени выражений.

Пример 2. Решить уравнение $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$.

Решение. $\left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{5}{8},$

$$1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x + 1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x = \frac{5}{2},$$

$$2 + 2 \cos^2 2x = \frac{5}{2}.$$

Понизим степень еще раз:

$$2 + 1 + \cos 4x = \frac{5}{2}, \cos 4x = \frac{5}{2} - 3, \cos 4x = -\frac{1}{2}.$$

$$4x_1 = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad 4x_2 = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z}),$$

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, \quad x_2 = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2} \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, x_2 = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2} \quad (n \in \mathbb{Z}).$

Пример 3. Доказать тождество $\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}.$

Решение. Преобразуем правую часть равенства:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} &= \frac{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{\frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{\frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \\ &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Упражнения

380. Преобразуйте по формулам двойного угла выражение:

- | | | |
|-----------------------------------|--|--|
| 1) $\sin 22^\circ$; | 8) $\sin \frac{2\pi}{5}$; | 15) $\sin 3\alpha$; |
| 2) $\sin 42^\circ$; | 9) $\cos \frac{\pi}{7}$; | 16) $\cos \frac{\alpha}{2}$; |
| 3) $\cos 14^\circ$; | 10) $\cos \frac{3\pi}{8}$; | 17) $\sin(\alpha + \beta)$; |
| 4) $\cos 66^\circ$; | 11) $\operatorname{tg} 0,3\pi$; | 18) $\cos(\alpha - \beta)$; |
| 5) $\operatorname{tg} 26^\circ$; | 12) $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{7}$; | 19) $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)$; |
| 6) $\operatorname{tg} 51^\circ$; | 13) $\sin \alpha$; | 20) $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right)$. |
| 7) $\sin 0,2\pi$; | 14) $\cos \alpha$; | |

381. Найдите значение:

1) $\sin 2\alpha$, если $\sin \alpha = 0,8$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

2) $\sin 2\alpha$, если $\cos \alpha = -0,96$ и $0 < \alpha < \pi$;

3) $\cos 2\alpha$, если $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$;

4) $\cos 2\alpha$, если $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

5) $\operatorname{tg} 2\beta$, если $\operatorname{tg} \beta = -0,75$;

6) $\operatorname{tg} 2\beta$, если $\operatorname{tg} \beta = \frac{3}{7}$.

382. В какой четверти находится угол α , если:

1) $\sin \alpha > 0$, $\sin 2\alpha > 0$; 3) $\sin \alpha < 0$, $\sin 2\alpha > 0$;

2) $\sin \alpha > 0$, $\sin 2\alpha < 0$; 4) $\sin \alpha < 0$, $\sin 2\alpha < 0$?

383. Преобразуйте в синус, косинус или тангенс некоторого угла выражение:

1) $2 \sin \alpha \cos \alpha$;

10) $\cos^2 112,5^\circ - \sin^2 112,5^\circ$;

2) $2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha$;

11) $\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}$;

3) $2 \sin 12^\circ \cos 12^\circ$;

12) $\cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} - \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2}$;

4) $2 \cos 12^\circ \sin 12^\circ$;

13) $2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)$;

5) $2 \cos 67,5^\circ \sin 67,5^\circ$;

14) $2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right)$;

6) $2 \cos 105^\circ \sin 105^\circ$;

15) $\frac{2 \operatorname{tg} 10^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 10^\circ}$;

7) $\cos^2 70^\circ - \sin^2 70^\circ$;

16) $\frac{2 \operatorname{tg} 70^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 70^\circ}$;

8) $\cos^2 75^\circ - \sin^2 75^\circ$;

17) $\frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{4}}$;

9) $\cos^2 22,5^\circ - \sin^2 22,5^\circ$;

18) $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha + \beta}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}}$.

384. Сократите дробь, используя формулы двойного угла и формулы приведения:

$$1) \frac{\sin 66^\circ}{2 \sin 33^\circ};$$

$$5) \frac{2 \sin 160^\circ}{\sin 40^\circ};$$

$$2) \frac{\sin 50^\circ}{\sin 25^\circ};$$

$$6) \frac{2 \sin 153^\circ}{\cos 36^\circ};$$

$$3) \frac{\cos 20^\circ}{\sin 10^\circ + \cos 10^\circ};$$

$$7) \frac{\cos^2 40^\circ - \sin^2 40^\circ}{2 \sin 5^\circ};$$

$$4) \frac{\cos 18^\circ - \sin 18^\circ}{\cos 36^\circ};$$

$$8) \frac{\sin 40^\circ}{\sin 25^\circ + \cos 25^\circ}.$$

385. Упростите выражение, используя формулу синуса двойного угла:

$$1) 2 \sin 10^\circ \cos 10^\circ;$$

$$2) 2 \sin 10^\circ \cos 10^\circ \cos 20^\circ;$$

$$3) \cos 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ;$$

$$4) \cos \alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha \cos 8\alpha \cos 16\alpha.$$

Сколько раз вы использовали формулу синуса двойного угла в каждом случае?

В чем вы видите усложнение каждого следующего выражения?

386. Вычислите координаты точек пересечения графиков функций:

$$1) y = \sin^2 x \text{ и } y = \cos^2 x; \quad 2) y = 3 \cos x \text{ и } y = 6 \sin 2x.$$

387. Укажите наименьшее положительное число x , при котором:

$$1) \sin x^\circ = \sin^2 75^\circ - 2 \sin 75^\circ \cos 75^\circ + \cos^2 75^\circ;$$

$$2) \cos x^\circ = \cos^2 105^\circ - \sin^2 105^\circ.$$

388. Решите уравнение, применяя формулы двойного аргумента:

$$1) 2 \sin x \cos x = 1; \quad 3) 4 \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} - \sqrt{3} = 0;$$

$$2) \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1}{2}; \quad 4) \sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} - 1 = 0.$$

389. Решите уравнение, понижая его степень с помощью формул

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \text{ и } \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}.$$

$$1) \sin^4 x + \cos^4 x = 1; \quad 2) \sin^6 x + \cos^6 x = 1.$$

390°. Докажите тождество:

1) $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos 2\alpha$;

2) $\sin \alpha \cos \alpha \cos 2\alpha = \frac{1}{4} \sin 4\alpha$;

3) $\left(\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}\right)^2 = 1 + \sin \alpha$;

4) $\left(\sin \frac{\beta}{4} - \cos \frac{\beta}{4}\right)^2 = 1 - \sin \frac{\beta}{2}$;

5) $1 - 8 \sin^2 \frac{\alpha}{4} \cos^2 \frac{\alpha}{4} = \cos \alpha$;

6) $\cos^2 \frac{\beta}{2} - 4 \sin^2 \frac{\beta}{4} \cos^2 \frac{\beta}{4} = \cos \beta$;

7) $\sin 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha = \cos 2\alpha \operatorname{tg} \alpha$;

8) $\operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} - \sin \beta = \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \cos \beta$.

391°. Проверьте равенство:

1) $\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos \alpha}} = \sin \frac{\alpha}{4}$, если $\pi < \alpha < 2\pi$;

2) $\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos \alpha}} = \cos \frac{\alpha}{4}$, если $\pi < \alpha < 2\pi$.

392°. Докажите тождество $\sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$.

393°. Может ли при каком-либо значении x быть верным равенство:

1) $\sin x^\circ \cos x^\circ = \sin 24^\circ$;

2) $\sin x^\circ \cos x^\circ = \sin 34^\circ$;

3) $\cos^2 x^\circ - \sin^2 x^\circ = 2 \cos 100^\circ$;

4) $\sin^2 x^\circ - \cos^2 x^\circ = 2 \cos 130^\circ$?

394°. Докажите, что $\sin 3\alpha = \sin \alpha (3 - 4 \sin^2 \alpha)$.

395°. При каких значениях аргумента функция y принимает наибольшее значение, а при каких — наименьшее? Каковы эти значения?

1) $y = \sin 2x$;

4) $y = \cos^2 x - \sin^2 x$;

2) $y = \cos 2x$;

5) $y = \sin x \cos x \cos 2x$;

3) $y = \sin x \cos x$;

6) $y = \sin 2x (\sin^2 x - \cos^2 x)$.

396°. Докажите тождество

$$\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{16}.$$

Попытайтесь придумать аналогичные тождества.

Контрольные вопросы и задания

1. Выведите формулы синуса и косинуса двойного угла.

2. Найдите $\cos \alpha$, если $\sin \frac{\alpha}{2} = -0,6$.

3. Докажите тождество $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$.

25. Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму. Обратное преобразование

Формулы сложения, с которыми вы познакомились в предыдущих пунктах, отличаются знаком в правых частях равенства:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta;$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta;$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta;$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta.$$

Это наводит на мысль о почленном сложении или вычитании указанных пар равенств. Сложим первые два равенства:

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta.$$

Делением обеих частей этого равенства на 2 получим формулу, позволяющую переходить от произведения к сумме косинусов:

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)).$$

Обозначим теперь в формуле

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$$

буквой x сумму $\alpha + \beta$, а буквой y разность $\alpha - \beta$:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = x, \\ \alpha - \beta = y. \end{cases}$$

Из этой системы, сначала складывая ее уравнения, а затем вычитая из первого уравнения второе, найдем, что $\alpha = \frac{x+y}{2}$, $\beta = \frac{x-y}{2}$.

Подставим введенные обозначения в формулу

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta;$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}.$$

Мы получили формулу перехода от суммы косинусов к их произведению.

Подобным же образом из формул сложения можно получить и следующие формулы:

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)),$$

или

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2},$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)),$$

или

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}.$$

Заменяя в последней формуле y на $-y$:

$$\sin x + \sin(-y) = \sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2},$$

получим еще одну формулу:

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}.$$

Пример 1. Упростить выражение

$$\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ &= \frac{1}{2} (\cos 20^\circ - \cos 60^\circ) \cdot \cos 10^\circ = \\ &= \frac{1}{2} \cos 20^\circ \cos 10^\circ - \frac{1}{4} \cos 10^\circ = \\ &= \frac{1}{4} (\cos 10^\circ + \cos 30^\circ) - \frac{1}{4} \cos 10^\circ = \frac{1}{4} \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{8}$.

Пример 2. Доказать тождество

$$\frac{\sin \alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos \alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha} = \operatorname{tg} 3\alpha.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos \alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha} &= \frac{(\sin \alpha + \sin 5\alpha) + \sin 3\alpha}{(\cos \alpha + \cos 5\alpha) + \cos 3\alpha} = \\ &= \frac{2 \sin 3\alpha \cos 2\alpha + \sin 3\alpha}{2 \cos 3\alpha \cos 2\alpha + \cos 3\alpha} = \frac{\sin 3\alpha (2 \cos 2\alpha + 1)}{\cos 3\alpha (2 \cos 2\alpha + 1)} = \operatorname{tg} 3\alpha, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Пример 3. Решить уравнение $\sin x - \cos 3x = 0$.

Решение 1. Среди формул перехода от суммы или разности к произведению нет соответствующей формулы, поэтому с помощью формулы приведения заменим $\sin x$ на $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$:

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos 3x &= 0, \\ \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) &= 0. \end{aligned}$$

Произведение в левой части уравнения равно нулю, когда хотя бы один из сомножителей равен нулю:

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 0 \text{ или } \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = 0;$$

$$\frac{\pi}{4} + x = \pi n \text{ или } \frac{\pi}{4} - 2x = \pi n \quad (n \in \mathbb{Z}),$$

$$x = \pi n - \frac{\pi}{4} \text{ или } x = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi n}{2} \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Ответ: $\pi n - \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8} - \frac{\pi n}{2} \quad (n \in \mathbb{Z})$.

Решение 2. Можно было воспользоваться *условием равенства синуса и косинуса*, заметив, что $\sin \alpha = -\cos \beta$ только в двух случаях:

$$1) \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + 2\pi n;$$

2) $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ (n — любое целое число) (рис. 107).

Тогда 1) $4x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ и 2) $-2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ (n — любое целое число).

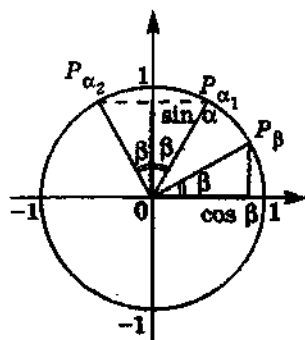


Рис. 107

Упражнения

397. Прочитайте выведенные в этом пункте формулы, используя слова «полусумма» и «полуразность».

398. Преобразуйте выражение в произведение тригонометрических функций и, где возможно, упростите его:

1) $\cos 75^\circ + \cos 15^\circ$; 7) $\sin 3\alpha - \sin 5\alpha$;

2) $\sin 152^\circ + \sin 28^\circ$; 8) $\cos 2\alpha + \cos 4\alpha$;

3) $\sin 78^\circ - \sin 42^\circ$; 9) $\frac{1}{2} + \cos 40^\circ$;

4) $\cos 48^\circ - \cos 12^\circ$; 10) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin \alpha$;

5) $\sin \frac{\pi}{10} + \sin \frac{\pi}{12}$; 11) $\frac{3}{4} - \cos^2 \alpha$;

6) $\cos \frac{\pi}{8} - \cos \frac{\pi}{18}$; 12) $\frac{1}{4} - \sin^2 \alpha$.

399. Упростите выражение:

1) $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$; 2) $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)$.

400. Упростите выражение:

1) $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$; 2) $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$.

Попытайтесь сформулировать словами особенности выражений, приведенных в заданиях 399 и 400.

401. Вычислите, не пользуясь калькулятором:

1) $\cos 37,5^\circ \cos 7,5^\circ$; 2) $\sin 52,5^\circ \sin 7,5^\circ$.

402. Докажите тождество:

1) $\frac{\sin x - \sin y}{\cos x + \cos y} = \operatorname{tg} \frac{x - y}{2}$;

2) $\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta} = \frac{\sin \frac{\alpha + \beta}{2}}{\sin \frac{\alpha - \beta}{2}}$;

3) $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$;

4) $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$;

5) $\operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}$;

$$6) \frac{\sin \alpha + \sin 3\alpha}{\cos \alpha + \cos 3\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha;$$

$$7) \bullet \sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right);$$

$$8) \bullet \sin \alpha - \cos \alpha = \sqrt{2} \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right).$$

403. Преобразуйте произведение в сумму и упростите:

$$1) \sin 45^\circ \sin 15^\circ; \quad 3) \cos \frac{2\pi}{5} \cos \frac{3\pi}{5};$$

$$2) \cos 75^\circ \cos 15^\circ; \quad 4) \sin \frac{\pi}{24} \sin \frac{5\pi}{24}.$$

404[•]. Вычислите:

$$1) \sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ;$$

$$2) \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{tg} 80^\circ.$$

405[○]. Решите уравнение, используя формулы суммы и разности тригонометрических функций:

$$1) \sin x + \sin 3x = 0; \quad 3) \sin 5x = \sin x;$$

$$2) \cos 4x + \cos x = 0; \quad 4) \bullet \sin 3x = \cos 2x - \cos x;$$

$$5) \sin \left(\frac{\pi}{6} + x \right) + \sin \left(\frac{\pi}{6} - x \right) = \frac{1}{2};$$

$$6) \sin (x + \alpha) + \sin (x - \alpha) = \cos \alpha \quad (\cos \alpha \neq 0).$$

406[○]. Решите уравнение, используя разложение на множители (сгруппируйте члены, к которым будет применяться формула суммы или разности):

$$1) \sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0;$$

$$2) \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0;$$

$$3) \cos x - \sin 3x = \cos 5x;$$

$$4) \bullet \cos (x - \alpha) - \cos (x + \alpha) = \sin \alpha.$$

407[○]. Упростите выражение:

$$1) \sin \alpha (\sin \alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha);$$

$$2) \sin \alpha (\sin 2\alpha + \sin 4\alpha + \sin 6\alpha + \sin 8\alpha);$$

$$3) \sin 2\alpha (\sin \alpha + \sin 5\alpha + \sin 9\alpha + \sin 13\alpha).$$

• В чем особенность аргументов синусов, стоящих в скобке? Какая связь между аргументами синусов, стоящих в скобках, и аргументом синуса вне скобок?

408[○]. Упростите выражение:

1) $\sin \alpha (\cos \alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \cos 7\alpha)$;

2) $\sin \alpha (\cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \cos 6\alpha + \cos 8\alpha)$;

3) $\sin 2\alpha (\cos \alpha + \cos 5\alpha + \cos 9\alpha + \cos 13\alpha)$.

• В чем особенность аргументов косинусов, стоящих в скобке? Какая связь между аргументами косинусов, стоящих в скобках, и аргументом синуса за скобками? Сравните закономерности, полученные в данном и предыдущем заданиях, и сделайте общий вывод.

409[●]. Вычислите, используя закономерности, найденные в двух предыдущих заданиях:

1) $\sin 10^\circ (\sin 10^\circ + \sin 30^\circ + \sin 50^\circ)$;

2) $\sin 20^\circ (\cos 10^\circ + \cos 50^\circ + \cos 90^\circ + \cos 130^\circ)$;

3) $\sin 30^\circ (\sin 10^\circ + \sin 70^\circ + \sin 130^\circ)$.

Составьте самостоятельно несколько примеров, используя данные закономерности.

410[●]. Докажите тождества:

1) $\sin \alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha = \frac{\sin^2 4\alpha}{\sin \alpha}$;

2) $\cos \alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \cos 7\alpha = \frac{\sin 8\alpha}{2 \sin \alpha}$;

3) $\cos 2\alpha + \cos 6\alpha + \cos 10\alpha + \cos 14\alpha = \frac{\sin 6\alpha}{2 \sin 2\alpha}$.

Попытайтесь придумать аналогичное тождество.

411. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций:

1) $y = \sin 2x$ и $y = \sin 4x$; 2) $y = \cos 7x$ и $y = \cos 3x$.

412[○]. Найдите все решения уравнения:

1) $\sin x + \sin 3x = 0$; 2) $\cos 3x + \cos x = 0$,

принадлежащие промежутку $[-\pi; \pi]$.

Контрольные вопросы и задания

1. Как преобразовать разность косинусов в произведение?

2. Выведите формулу $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$.

3. Вычислите: а) $\cos 78^\circ - \cos 42^\circ$; б) $\sin 75^\circ \sin 15^\circ$;

в) $\log_{\frac{1}{2}} \sin 70^\circ + \log_{\frac{1}{2}} \sin 50^\circ + \log_{\frac{1}{2}} \sin 10^\circ$.

26. Решение тригонометрических уравнений

В предыдущих пунктах вы уже встречались с тригонометрическими уравнениями. В большинстве случаев исходное уравнение в процессе решения сводится к простейшим тригонометрическим уравнениям. Однако для тригонометрических уравнений не существует единого метода решения. В каждом конкретном случае успех зависит от знания тригонометрических формул и от умения выбрать из них нужные. При этом обилие различных формул иногда делает этот выбор довольно трудным.

Рассмотрим несколько основных типов тригонометрических уравнений.

Уравнения, сводящиеся к квадратным

Пример 1. Решить уравнение $2 \cos^2 x + 3 \sin x = 0$.

Решение. С помощью основного тригонометрического тождества это уравнение можно свести к квадратному относительно $\sin x$:

$$\begin{aligned} 2 \cos^2 x + 3 \sin x &= 0, & 2(1 - \sin^2 x) + 3 \sin x &= 0, \\ 2 - 2 \sin^2 x + 3 \sin x &= 0, & 2 \sin^2 x - 3 \sin x - 2 &= 0. \end{aligned}$$

Введем новую переменную $y = \sin x$, тогда наше уравнение примет вид: $2y^2 - 3y - 2 = 0$. Корни этого уравнения $y_1 = 2$, $y_2 = -0,5$.

Возвращаемся к переменной x и получаем простейшие тригонометрические уравнения:

1) $\sin x = 2$ — это уравнение не имеет корней, так как $\sin x < 2$ при любом значении x ;

$$2) \sin x = -0,5, x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, x_2 = \frac{7\pi}{6} + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Ответ: } -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \frac{7\pi}{6} + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Сравнивая серии корней $x_1 = \arcsin a + 2\pi n$ и $x_2 = -\arcsin a + \pi(2n + 1)$ уравнения $\sin x = a$ при $0 < |a| < 1$, можно заметить, что знак минус появляется перед арксинусом, когда прибавляется нечетное число π . А при прибавлении четного числа π арксинус берется со знаком плюс. Такое чередование знаков арксинуса можно обеспечить, домножив его на выражение $(-1)^n$.

Получится объединенная формула

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \text{ где } n \text{ любое целое число.}$$

Применяя эту формулу к рассмотренному в примере 1 уравнению, получим:

$$(-1)^n \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi n = (-1)^n \cdot (-1) \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Еще проще можно объединить серии корней уравнения $\cos x = a$, $x_1 = \arccos a + 2\pi n$ и $x_2 = -\arccos a + 2\pi n$ при $0 < |a| < 1$:

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n, \text{ где } n \text{ — любое целое число.}$$

Объединенные формулы корней позволяют записывать ответы более компактно, однако в некоторых случаях, например, при отборе корней, принадлежащих некоторому числовому промежутку, удобнее работать с каждой серией корней отдельно.

Однородные тригонометрические уравнения

Пример 2. Решить уравнение

$$2 \sin^2 x - 3 \sin x \cos x - 5 \cos^2 x = 0.$$

Решение. Рассмотрим два случая:

1) $\cos x = 0$ и 2) $\cos x \neq 0$.

1) Если $\cos x = 0$, то наше уравнение принимает вид $2 \sin^2 x = 0$, откуда $\sin x = 0$. Но это равенство не удовлетворяет условию $\cos x = 0$, так как ни при каком x косинус и синус одновременно в нуль не обращаются.

2) Если $\cos x \neq 0$, то мы можем разделить наше уравнение на $\cos^2 x$ и получить $2 \operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x - 5 = 0$.

Вводя новую переменную y , получаем квадратное уравнение $2y^2 - 3y - 5 = 0$, где $y = \operatorname{tg} x$.

Корни этого уравнения $y_1 = -1$, $y_2 = 2,5$. Возвращаемся к переменной x . $\operatorname{tg} x = -1$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$); $\operatorname{tg} x = 2,5$, $x = \operatorname{arctg} 2,5 + \pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$).

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $\operatorname{arctg} 2,5 + \pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$).

Примечание. Обозначив в исходном уравнении $\sin x$ буквой u , а $\cos x$ буквой v , получим уравнение вида $au^2 + buv + cv^2 = 0$.

Левая часть этого уравнения — многочлен, каждый член которого имеет вторую степень, а правая — нуль. Такие уравнения называют *однородными уравнениями второй степени относительно переменных u и v* . Делением на v^2 такое уравнение сводится к квадратному относительно $\frac{u}{v}$.

Пример 3. Решить уравнение

$$5 \sin^2 x - 3 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x - 3 = 0.$$

Решение. Данное уравнение можно свести к однородному тригонометрическому уравнению второй степени относительно $\sin x$ и $\cos x$. Представим с помощью основного тригонометрического тождества число 3 как $3 \sin^2 x + 3 \cos^2 x$:

$$5 \sin^2 x - 3 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x - 3 \sin^2 x - 3 \cos^2 x = 0.$$

Приведя подобные члены, получим уравнение

$$2 \sin^2 x - 3 \sin x \cos x - 5 \cos^2 x = 0$$

из примера 2.

Пример 4. Решить уравнение

$$3 \sin 2x + 7 \cos 2x + 3 = 0.$$

Решение. Это уравнение тоже можно свести к однородному. Применяя формулы синуса и косинуса двойного угла, получим:

$$6 \sin x \cos x + 7 (\cos^2 x - \sin^2 x) + 3 (\cos^2 x + \sin^2 x) = 0,$$

$$6 \sin x \cos x + 10 \cos^2 x - 4 \sin^2 x = 0,$$

$$2 \sin^2 x + 3 \sin x \cos x - 5 \cos^2 x = 0.$$

Мы снова пришли к однородному уравнению второй степени, рассмотренному в примере 2.

Примечание. В этом примере сами аргументы синуса и косинуса наталкивали на мысль о применении формул двойного угла. Но точно так же можно решить и уравнение $3 \sin x + 7 \cos x + 3 = 0$, если отнести к x как к двойному углу: $x = 2 \cdot \frac{x}{2}$.

В рассмотренных примерах мы имели дело с тригонометрическими функциями одного аргумента. Если же аргументы разные, то уравнение стараются или привести к одному аргументу, или свести его к виду $f(x) \cdot g(x) = 0$.

Пример 5. Решить уравнение $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin 2x$.

Решение. Применим в левой части уравнения формулу разности квадратов:

$$\begin{aligned}\sin^4 x - \cos^4 x &= \sin 2x, \\ (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) &= \sin 2x, \\ -\cos 2x &= \sin 2x.\end{aligned}$$

Отметим на единичной окружности углы, синус и косинус которых противоположны (рис. 108).

$$\text{Имеем: } 2x = -\frac{\pi}{4} + \pi n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{О т в е т: } -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2} \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

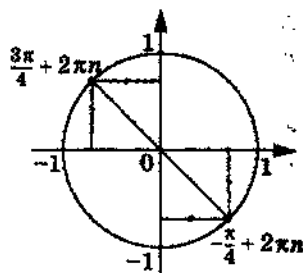


Рис. 108

П р и м е ч а н и е 1. Можно было, конечно, отнестись к уравнению $-\cos 2x = \sin 2x$ как к однородному уравнению первой степени и рассмотреть два случая:

1) если $\cos 2x = 0$, то $\sin 2x = 0$ (эти два равенства не могут быть верными одновременно);

2) если $\cos 2x \neq 0$, то, разделив обе части на $\cos 2x$, получим: $\operatorname{tg} 2x = -1$, $2x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$ и $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2} \quad (n \in \mathbb{Z})$.

П р и м е ч а н и е 2. Запишем уравнение $-\cos 2x = \sin 2x$ в виде $\sin 2x + \cos 2x = 0$ и преобразуем его левую часть, вводя *вспомогательный угол*. Для этого умножим обе части уравнения на $\frac{\sqrt{2}}{2}$ и воспользуемся тем, что $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x = \cos \frac{\pi}{4} \sin 2x + \sin \frac{\pi}{4} \cos 2x = \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right).$$

Получим: $\sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = 0$, $2x + \frac{\pi}{4} = \pi n$, $2x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2} \quad (n \in \mathbb{Z})$.

▼ Прием введения вспомогательного угла всегда позволяет заменить синусом или косинусом выражение $a \sin x + b \cos x$. Для этого надо добиться, чтобы коэффициенты синуса и косинуса являлись соответственно косинусом и синусом некоторого угла, т. е. чтобы сумма их квадратов оказалась равной 1:

$$\begin{aligned}a \sin x + b \cos x &= \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x \right) = \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \varphi \sin x + \sin \varphi \cos x) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin (x + \varphi),\end{aligned}$$

$$\text{где } \varphi = \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Введение вспомогательного угла особенно удобно, когда вспомогательный угол «хороший», т. е. равен $\pm \frac{\pi}{6}$, $\pm \frac{\pi}{4}$ и т. п. Например, при решении уравнения $\cos x - \sqrt{3} \sin x = 1$ имеем: $\sqrt{1+3} = 2$,

$$\frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = \cos \frac{\pi}{3} \cos x - \sin \frac{\pi}{3} \sin x = \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right),$$

$$\cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2}, x + \frac{\pi}{3} = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, x_1 = 2\pi n, x_2 = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n (n \in \mathbb{Z}). \triangle$$

Пример 6. Решить уравнение $\sin x + \sin 3x = 4 \cos^2 x$.

Решение. Перенесем все члены в левую часть и преобразуем ее:

$$\begin{aligned} \sin x + \sin 3x - 4 \cos^2 x &= 2 \sin 2x \cos x - 4 \cos^2 x = \\ &= 2 \cos x (\sin 2x - 2 \cos x) = 2 \cos x (2 \sin x \cos x - 2 \cos x) = \\ &= 4 \cos^2 x (\sin x - 1). \end{aligned}$$

Наше уравнение приобрело вид: $4 \cos^2 x (\sin x - 1) = 0$.

Поскольку левая часть уравнения имеет смысл при всех значениях x , получаем два случая: $\cos x = 0$ или $\sin x - 1 = 0$, $\sin x = 1$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ или $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n (n \in \mathbb{Z})$.

Поскольку вторая серия корней полностью содержится в первой, ее в ответе не указываем.

О т в е т: $\frac{\pi}{2} + \pi n (n \in \mathbb{Z})$.

Упражнения

413. Решите уравнение:

- | | |
|--------------------------------------|------------------------------------|
| 1) $2 \cos x + \sqrt{3} = 0$; | 3) $(\sin x - \cos x)^2 - 1 = 0$; |
| 2) $\cos^2 x + \cos x = -\sin^2 x$; | 4) $\sin^2 x - 6 \sin x = 0$. |

414. Решите уравнение, сведя его к квадратному:

- | | |
|---|--|
| 1) $2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$; | 5) $\cos x - \sin^2 x = 1$; |
| 2) $2 \sin^2 x - 3 \sin x - 2 = 0$; | 6) $\sin x = 5 + \cos^2 x$; |
| 3) $6 - \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}^2 x$; | 7) $2 \cos^2 x + 4 = -\sin x$; |
| 4) $2 \operatorname{tg} x - 5 \operatorname{ctg} x = 3$; | 8) $8 \cos^4 x - 6 \sin^2 x + 1 = 0$. |

Выделите особенности уравнений, сводящихся к квадратным.

415. Решите однородное уравнение:

1) $\sin x + \cos x = 0$;

2) $\sin^2 x - \sqrt{3} \sin x \cos x = 0$;

3) $\sin^2 x + \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 0$;

4) $\sin^2 x \cos^2 x - 3 \cos^4 x = 0$.

Выделите особенности данных уравнений.

• Какими еще способами вы можете решить данные уравнения?

416⁰. Решите уравнение, сведя его к однородному:

1) $6 \sin^2 x + \sin x \cos x - \cos^2 x = 2$;

2) $3 \sin^2 x + 4 \sin x \cos x - 3 \cos^2 x - 2 = 0$.

Чем отличаются эти уравнения от однородных уравнений?

417⁰. Решите уравнение, используя формулы:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha,$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \text{ и } \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}.$$

1) $\cos^2 x - \sin^2 x = -1$; 3) $\cos^4 x + \sin^4 x = 1$;

2) $\cos^4 x - \sin^4 x = 1$; 4) $\cos^6 x + \sin^6 x = 1$.

Какие уравнения решаются с помощью формул понижения степени?

418⁰. Решите уравнение с помощью разложения на множители:

1) $(\cos x - 1)^2 = \cos^2 x - 1$;

2) $\cos x - \cos 2x = 1$;

3) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$;

4) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0$.

• Укажите, в каком задании при разложении на множители вы использовали: способ группировки, вынесение за скобки, формулы сокращенного умножения.

419^{*}. Решите уравнение, используя условия равенства одноименных функций:

$$\sin \alpha = \sin \beta: \alpha = \beta + 2\pi n \text{ или } \alpha = -\beta + (2n + 1)\pi, n \in \mathbb{Z};$$

$$\cos \alpha = \cos \beta: \alpha = \pm \beta + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta, \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} \beta: \alpha = \beta + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

- 1) $\sin 4x = \sin 7x$; 4) $\operatorname{ctg} 5x - \operatorname{ctg} x = 0$;
 2) $\cos 4x - \cos 5x = 0$; 5) $\sin\left(6x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$;
 3) $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} 5x$; 6) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos \frac{\pi}{2}$.

420°. Запишите условия, при которых выполняются равенства $\sin \alpha = \cos \beta$ и $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} \beta$. Используя полученные условия, решите уравнение:

1) $\sin 3x = \cos 4x$; 2) $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{ctg} 5x$.

421°. Докажите, что если $x^2 + y^2 = 1$, то существует такое число φ , что одновременно $\sin \varphi = x$ и $\cos \varphi = y$.

422°. Докажите, что уравнение

$(\sin x + \sqrt{3} \cos x) \sin 4x = 2$ не имеет корней.

423°. Определите, если возможно, тип уравнения. Наметьте план решения и выполните его.

- 1) $\sin^2 2x + 2 \cos^2 2x = \frac{7}{4}$;
 2) $3 \cos^2 x + 4 \sin x = 4$;
 3) $\sin 2x - \sin x = 2 \cos x - 1$;
 4) $\sin^2 x - \sqrt{3} \sin x \cos x = 0$;
 5) $\cos^2(45^\circ + x^\circ) - \cos^2(45^\circ - x^\circ) = -1$;
 6) $\sin^3 x \cos x - \sin x \cos^3 x = \frac{1}{4}$;
 7) $\cos x + \sqrt{3} \sin x = 1$; 8) $\cos 3x = \cos 5x$;
 9) $\sin^2 x - 10 \sin x \cos x + 21 \cos^2 x = 0$;
 10) $1 + \cos 3x + \cos 7x + \cos 10x = 0$;
 11) $2 \sin^2 x = 4 - 5 \cos x$;
 12) $7 \sin^2 x = 8 \sin x \cos x - \cos^2 x$;
 13) $\sin 2x \cos 3x + \cos 2x \sin 3x = 1$;
 14) $3 \sin^2 x + 2 \sin x \cos x = 2$;
 15) $\sin(x + \pi) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$;
 16) $\sqrt{3} \cos x - \sin x = 1$; 17) $\cos^4 2x - \sin^4 2x = \frac{1}{2}$;
 18) $1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0$.

424. Найдите наименьший положительный корень уравнения $4 \sin 3x \sin x - 2 \cos 2x + 1 = 0$.

425[•]. Найдите все решения уравнения

$$\cos 2x + \sin^2 x = \cos x,$$

принадлежащие отрезку $[-\pi; \pi]$.

426[•]. Найдите все решения уравнения

$$\frac{2 \cos^2 x + \cos x}{2 \cos x + 7 \sin^2 x} = -\frac{1}{2},$$

принадлежащие отрезку $[-\pi; \pi]$.

427[•]. Найдите все решения уравнения:

1) $\sin 2x + \cos x + 2 \sin x = -1$, удовлетворяющие условию $0 < x < 5$;

2) $\sqrt{3} \sin x + 2 \cos x = \sqrt{3} + \sin 2x$, удовлетворяющие условию $0 < x < 2$.

428[○]. При каких значениях a наибольшее значение функции $y = a \sin x + \cos x$ равно 5?

429. Решите уравнение:

1) $4^{\sin x} = 2$;

2) $5 + 2^{\frac{\sin(\frac{\pi}{4} - x)}{\sqrt{2} \cos x}} = 3 \cdot 4^{\frac{\sin(\frac{\pi}{4} - x)}{\sqrt{2} \cos x}}$;

3) $81^{(\sin 2x - 1) \cos 3x} - 9^{(\sin x - \cos x)^2} = 0$;

4) $\text{ctg } 2^x = \text{tg } 2^x + 2 \text{tg } 2^{x+1}$.

Контрольные вопросы и задания

1. Какие способы решения тригонометрических уравнений вы знаете?

2. Решите уравнение:

а) $\text{tg}^2 x - 3 = 0$;

в) $\sin^2 x - \sin 2x = 0$;

б) $6 \sin^2 x - \cos x = 5$;

г) $\sqrt{3} \cos^2 x - \sin x \cos x = 0$.



ПОВТОРЕНИЕ

Заключительная глава учебника состоит из двух пунктов. В первом — систематизируются знания о свойствах функций и преобразованиях их графиков. Вы познакомитесь также с обратными тригонометрическим функциями — последним классом функций, изучаемых в школьном курсе математики.

Второй пункт посвящен уравнениям и неравенствам. При этом основное внимание в нем уделено причинам появления посторонних решений, а также оформлению решений с использованием математической символики.

27. Функции и графики

Понятие функции начало складываться еще в XVII в. В начале функциями называли обычные алгебраические выражения с переменными — собственно, это сегодня они обычные, а тогда Декарт только-только ввел само понятие переменной. Впрочем, и сейчас никто из математиков не удивится, услышав выражения типа «функция x^2 » или «сумма функций $\sin x$ и $\cos x$ », — всем понятно, что в первом случае речь идет о функции $y = x^2$, а во втором — о сумме функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$, т. е. о функции $y = \sin x + \cos x$.

Существенное развитие понятие функции получило в XX в. в связи с разработкой теории множеств — стали рассматриваться не только знакомые вам числовые функции, но и функции, в которых переменные y и x принимают значения из произвольных множеств.

Область определения функции

За время изучения математики вы познакомились с различными функциями. Каждая функция имеет область опре-

область определения — множество значений, которые может принимать ее аргумент. Наиболее часто приходится находить *естественную область определения* функции, заданной аналитически, т. е. с помощью математического выражения $f(x)$. Естественная область определения функции $y = f(x)$ состоит из всех значений x , при которых выражение $f(x)$ имеет смысл.

Упражнение

430. Найдите область определения функции $y = f(x)$, если $f(x)$ равно:

$$1) \frac{x-1}{x^2-2x+1};$$

$$4) (4x^2 - 7x + 3)^{\frac{8}{5}};$$

$$2) \frac{x^2-1}{x^2+2x+1};$$

$$5)^{\circ} \log_{x-0,5} (4x - x^2 - 2);$$

$$3) \sqrt{5x^2 + 13x + 8};$$

$$6)^{\bullet} \log_{\sin x + 0,5 \cos x}.$$

Область значений функции

Каждому значению аргумента из области определения соответствует единственное значение функции. Все значения, которые принимает функция, составляют ее *область значений* (иногда можно встретиться с термином *область изменения функции* или *множество значений функции*).

Упражнение

431. Укажите области значений следующих функций:

$$1) y = 2x - 17;$$

$$6)^{\bullet} y = 12 \cos x - 4 \cos^2 x - 5;$$

$$2) y = \frac{5}{x};$$

$$7)^{\bullet} y = 0,5 x^2 - 4x + 8;$$

$$3) y = x^2 - 14x + 38;$$

$$8)^{\bullet} y = 2\sqrt{3-2x-x^2};$$

$$4) y = 10x - x^2 - 21;$$

$$9)^* y = 3^x + 3^{-x}.$$

$$5)^{\bullet} y = 2 \sin^2 x + \sin x - 1;$$

Непрерывность функции

Важным свойством, которым обладают многие функции, является *непрерывность*. Мы говорили, что функция непре-

рывна, если ее график можно провести, не отрывая карандаш от бумаги.

Графики некоторых функций состоят из нескольких непрерывных ветвей. Говорят, что такие функции непрерывны на соответствующих числовых промежутках.

Упражнение

432. Укажите промежутки непрерывности следующих функций:

$$1) y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 1}; \quad 3)^\circ y = \sqrt{\sin x};$$

$$2)^\circ y = \frac{1}{5 - 5 \sin x}; \quad 4)^\bullet y = [x] + \{2x\}.$$

Изученные вами математические выражения $f(x)$, в записи которых нет целой или дробной части, задают функции $y = f(x)$, называемые *элементарными*. Полезно знать, что *любая элементарная функция непрерывна на любом промежутке из ее области определения*.

Важное свойство непрерывных функций — сохранение знака на промежутках области определения, на которых она не обращается в нуль. На этом свойстве непрерывных функций основано решение неравенств методом интервалов.

Упражнение

433. Решите неравенство:

$$1) \frac{2x + 1}{(x + 3)(x - 5)} > 0; \quad 4)^\circ \frac{4 - 2^{8-x}}{x^2 - 1} > 0;$$

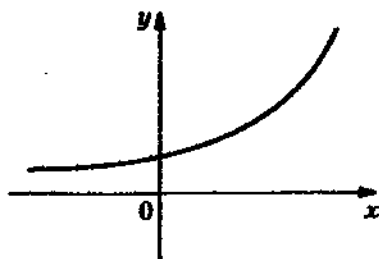
$$2) \frac{4x^2 - 1}{x + 3} < 0; \quad 5)^\bullet \frac{0,5^x - 2}{\cos x} > 0;$$

$$3)^\circ \frac{\log_{0,5} x + 2}{(x - 3)(x + 5)} \geq 0; \quad 6)^\bullet \frac{\sin x}{3^{2x-1} - 1} < 0.$$

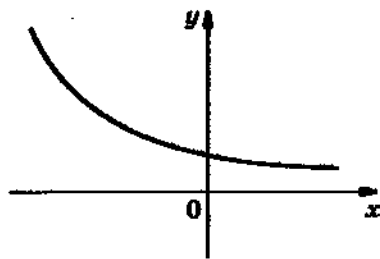
Монотонность функции

Часто при решении неравенств используют свойство монотонности, т. е. возрастания или убывания функции.

Некоторые функции возрастают или убывают на всей своей области определения — их называют, соответственно, *воз-*



а)



б)

Рис. 109

растающими или убывающими. На рисунке 109 изображены эскизы возрастающей (109, а) и убывающей (109, б) функций.

Упражнение

434°. Решите неравенства:



Рис. 110

$$1) 3^{x^2+x-1} < \left(\frac{1}{3}\right)^{4+3x-x^2};$$

$$2) \log_{0,5}(x+1) > \log_{0,25}(x^2-x+4);$$

$$3) \bullet \log_x \frac{x+4}{2x-1} > 1;$$

$$4) \bullet \log_{\frac{x+4}{x+1}}(x-5) < 1.$$

Большинство приведенных выше функций на одних промежутках возрастают, а на других убывают (рис. 110).

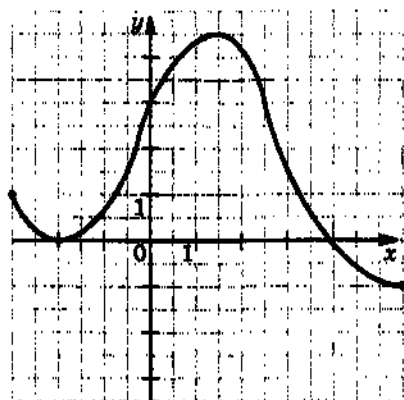
Упражнение

435. Укажите промежутки возрастания и убывания функций, заданных графиками:

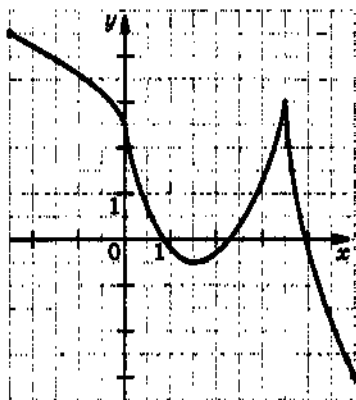
1) рис. 110; 2) рис. 111, а; 3) рис. 111, б.

Знание свойств конкретных функций часто позволяет сделать вывод о монотонности более сложных функций.

Докажем, например, что функция $y = x^2 - \log_{0,5} x - 7$ возрастает на всей своей области определения, т. е. на промежутке $(0; +\infty)$.



а)



б)

Рис. 111

Пусть $0 < x_1 < x_2$, тогда

1) в силу возрастания функции $y = x^2$ на промежутке $(0; +\infty)$:

$$x_1^2 < x_2^2; \quad (1)$$

2) по правилам действий с неравенствами вычтем из обеих частей верного неравенства (1) число 7:

$$x_1^2 - 7 < x_2^2 - 7; \quad (2)$$

3) в силу убывания логарифмической функции с основанием 0,5, имеем:

$$\log_{0,5} x_1 > \log_{0,5} x_2; \quad (3)$$

4) по правилам действий с неравенствами умножим верное неравенство (3) на -1 :

$$-\log_{0,5} x_1 < -\log_{0,5} x_2; \quad (4)$$

5) по правилам действий с неравенствами сложим верные неравенства одного смысла (2) и (4):

$$x_1^2 - 7 - \log_{0,5} x_1 < x_2^2 - 7 - \log_{0,5} x_2.$$

Таким образом, при $0 < x_1 < x_2$ выполняется неравенство $y(x_1) < y(x_2)$, а значит, функция возрастает, что и требовалось доказать.

Упражнения

436. Докажите, что функция $y = -\frac{2}{5^{2-x}}$ является убывающей.

437°. Среди следующих функций укажите возрастающие и убывающие. Объясните, как вы сделали свой вывод:

1) $y = 0,5^{5-x} + \sqrt{x-2}$;

4) $y = (x-1)\sqrt{x+1}$;

2) $y = \log_2(3-x) + \frac{1}{\sqrt{x+7}}$;

5) $y = x^2 + \lg(-2-x)$;

3) $y = (x+1)\sqrt{x-1}$;

6) $y = (x^2-16) \cdot \lg(-2-x)$.

438°. Укажите промежутки возрастания и убывания следующих функций. Найдите их наибольшие и наименьшие значения, если они существуют:

1) $y = \frac{8}{\sqrt{x^2+2x+5}}$;

4) $y = \log_7(x^2+6x+11)$;

2) $y = 0,2^{x^2-4x+2}$;

5) $y = 3^{1-\cos x}$;

3) $y = -\frac{3}{\sqrt{4-3x-x^2}}$;

6) $y = 0,3^{\cos^2 x - \sin^2 x}$.

439*. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком: 1) рис. 111, а; 2) рис. 111, б. Зная, что $g(x) = \sqrt{f(x)}$ и $h(x) = \frac{1}{\lg f(x)}$, найдите:

а) область определения функций $y = g(x)$ и $y = h(x)$;

б) область значений функций $y = g(x)$ и $y = h(x)$;

в) промежутки возрастания и убывания функций $y = g(x)$ и $y = h(x)$;

г) наибольшие и наименьшие значения функций $y = g(x)$ и $y = h(x)$, если они существуют.

440°. Подберите корень уравнения и докажите, что он единственный:

1) $\log_5(5^x - 4) = 1 - x$;

2) $\log_4(4^{-x} + 3) = x + 1$;

3) $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-1} = 11 + 2x - 3x^2$;

4) $\sqrt{x-10} + \sqrt{14+x} = \frac{12}{x-9}$;

$$5) \log_{\frac{1}{3}}(x+2) - \sqrt{3x+1} = x-4;$$

$$6) 0,5^{x+1} - \sqrt{x+7} = x+5;$$

$$7) \sin \frac{\pi x}{2} = x^2 - 2x + 2;$$

$$8) \log_2 x + \log_x 2 = 2 - \sqrt{x-2};$$

$$9) 5^x + 5^{-x} = 2 \cos \left(\frac{5x^2 - 4x}{9} \right).$$

Обратимость функции

Равенство $y = f(x)$, задающее функцию y , удобно для нахождения значения y по данному значению x . Часто, однако, приходится решать *обратную* задачу — находить значения аргумента, при которых функция принимает то или иное значение.

Если каждое свое значение функция y принимает по одному разу, т. е. только при каком-то одном значении аргумента x , то, выражая x из равенства $y = f(x)$, мы получим равенство $x = g(y)$, задающее функцию x .

Однако в школьной математике функцию обычно обозначают буквой y , поэтому переменные в равенстве $x = g(y)$ переименовывают и получают функцию $y = g(x)$, *обратную* для функции $y = f(x)$.

С этим переименованием связано свойство симметрии графиков *взаимно обратных* функций относительно прямой $y = x$. Действительно, функция $x = g(y)$ имеет тот же самый график, что и функция $y = f(x)$, а графики $x = g(y)$ и $y = g(x)$ симметричны относительно прямой $y = x$ (рис. 112).

Функцию, имеющую обратную, называют *обратимой*. Так, например, обратима каждая из взаимно обратных функций $y = a^x$ и $y = \log_a x$.

Вообще, *любая монотонная функция обратима*, поскольку каждое свое значение она принимает один раз.

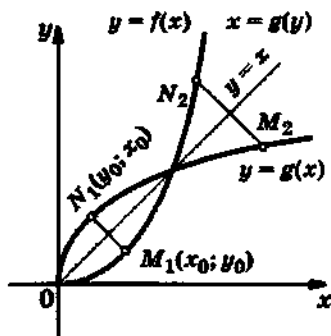


Рис. 112

Некоторые функции не обладают свойством обратимости, поскольку одно и то же значение принимают при различных значениях аргумента. Так, например, значение 1 функция $y = x^2$ принимает при двух значениях аргумента: $x = 1$ и $x = -1$, а функция $y = \sin x$ при любом $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$).

Чтобы получить функцию, обратную функции $y = x^2$, последнюю рассматривают на промежутке $[0; +\infty)$, на котором она, во-первых, принимает все свои значения и, во-вторых, монотонна, и, следовательно, обратима. Как вы знаете, обратной функцией для нее является функция $y = \sqrt{x}$.

Точно так же, ограничивая область определения функции $y = x^n$ при четном n , получают обратную ей функцию $y = \sqrt[n]{x}$.

Обратные тригонометрические функции

Функция $y = \arcsin x$

Чтобы сделать обратной функцию $y = \sin x$, нужно рассмотреть ее на промежутке, где она, во-первых, принимает все свои значения и, во-вторых, монотонна.

Естественно взять наиболее близкий к нулю промежуток $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. На этом промежутке функция $y = \sin x$ имеет обратную функцию $y = \arcsin x$ (рис. 113).

Перечислим ее свойства:

область определения — отрезок $[-1; 1]$;

область значений — отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

функция непрерывна и является возрастающей.

Функция $y = \arccos x$

Функция $y = \cos x$ убывает и принимает все свои значения на промежутке $[0; \pi]$. Здесь она имеет обратную функцию $y = \arccos x$ (рис. 114), которая определена, непрерывна и убывает на промежутке $[-1; 1]$. Область значений функции $y = \arccos x$ — отрезок $[0; \pi]$.

Функция $y = \operatorname{arctg} x$

Функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает и принимает все свои значения на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Здесь она имеет обратную функ-

цию $y = \operatorname{arctg} x$ (рис. 115), которая определена, непрерывна и возрастает на всей числовой прямой. Область значений функции $y = \operatorname{arctg} x$ — интервал $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Функция $y = \operatorname{arcsctg} x$

Функция $y = \operatorname{ctg} x$ убывает и принимает все свои значения на промежутке $(0; \pi)$. Здесь она имеет обратную функцию $y = \operatorname{arcsctg} x$ (рис. 116), которая определена, непрерывна и убывает на всей числовой прямой. Область значений функции $y = \operatorname{arcsctg} x$ — интервал $(0; \pi)$.

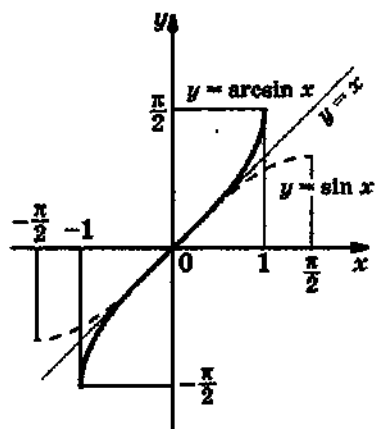


Рис. 113

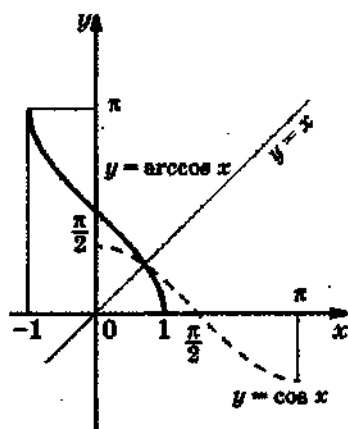


Рис. 114

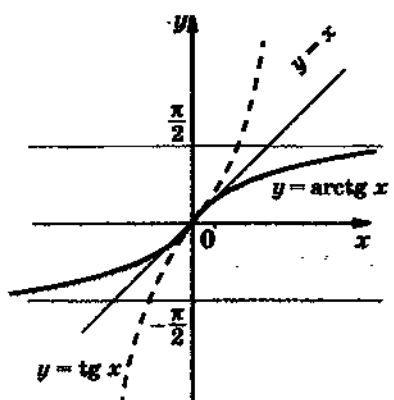


Рис. 115

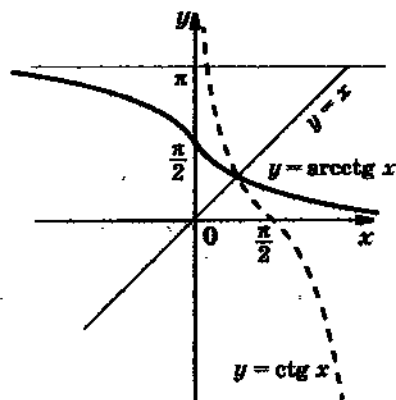


Рис. 116

Рассматривая взаимно обратные функции, нетрудно заметить, что:

1) область определения одной из них является областью значений другой;

2) если одна из них возрастающая (убывающая), то и другая, соответственно, возрастающая (убывающая);

3) если прямая $x = a$ служит вертикальной асимптотой одной, то другая имеет горизонтальную асимптоту $y = a$.

Упражнения

441. Найдите значение функции:

1) $y = \arcsin x$, если x равен:

а) 0,5; б) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\sin \frac{5\pi}{7}$; г) $\sin 10$; д) $\cos 2$;

2) $y = \arccos x$, если x равен:

а) -0,5; б) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\cos \frac{5\pi}{4}$; г) $\cos 10$; д) $\sin 1$;

3) $y = \operatorname{arctg} x$, если x равен:

а) $\sqrt{3}$; б) -1; в) $\operatorname{tg} \frac{4\pi}{5}$; г) $\operatorname{tg} 7$; д) $\operatorname{ctg} 1$.

4) $y = \operatorname{arccotg} x$, если x равен:

а) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) 1; в) $\operatorname{ctg} \frac{8\pi}{5}$; г) $\operatorname{ctg} 7$; д) $\operatorname{tg} 2$.

442*. Решите неравенства:

1) $-\frac{\pi}{6} < \arcsin(x^2 - 1,5x) \leq \frac{\pi}{6}$; 2) $6 \arccos^2 x + 7 \arccos x < 3$.

Четность и нечетность функции

Иногда преобразование переводит график функции сам в себя. Так, например, поскольку значение четной функции не изменяется при перемене знака у аргумента:

$$f(-x) = f(x),$$

график четной функции оказывается симметричен относительно оси ординат.

Значение нечетной функции при перемене знака у аргумента свой знак меняет:

$$f(-x) = -f(x),$$

поэтому график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Понятно, что область определения и четной, и нечетной функции должна быть симметрична относительно нуля.

Упражнения

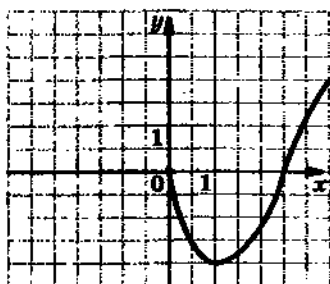
443^{*}. Задайте аналитически какую-нибудь функцию, имеющую тот же самый график, что и обратная ей. Может ли возрастающая функция, отличная от функции $y = x$, иметь тот же самый график, что и обратная ей?

444. Определите, какие из следующих функций четные, какие нечетные, а какие не являются ни четными, ни нечетными: 1) $y = x + \sin x$; 2) $y = \sin x \cdot \cos x$; 3) $y = x^2 + \cos x$; 4) $y = x \cdot \operatorname{arctg} x$.

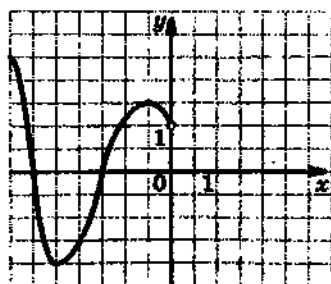
• Какие можно сделать выводы о четности или нечетности:

- а) суммы двух четных функций;
 - б) суммы двух нечетных функций;
 - в) произведения двух четных функций;
 - г) произведения двух нечетных функций;
 - д) произведения четной и нечетной функций
- с одинаковыми областями определения?

445. Дополните графики на рисунке 117 так, чтобы они стали задавать: 1) четные; 2) нечетные функции.



а)



б)

Рис. 117

Периодичность функции

Если при сдвигах графика функции параллельно оси абсцисс вправо и влево на некоторое расстояние он переходит сам в себя, то функция является *периодической*. Расстояние, на которое переносится график, называют *периодом* функции.

Рассматривая периодические функции, обычно указывают их наименьший период. Тригонометрические функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ имеют период 2π , период функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ равен π . Периодична также и функция $y = \{x\}$ — ее наименьший период равен 1.

Упражнение

446. Постройте график функции, зная, что: 1) ее период равен 2 (рис. 118, а); 2) ее период равен 2 и она четная (рис. 118, б).

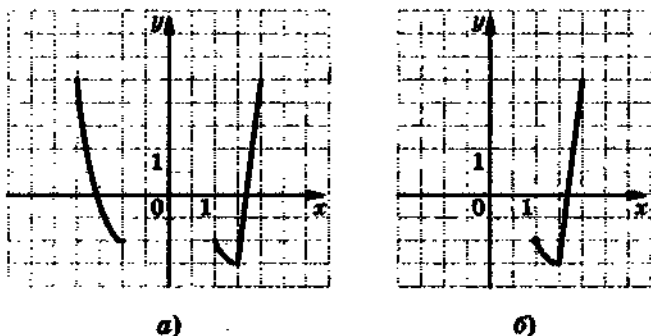


Рис. 118

Преобразование графиков

Симметрии и параллельный перенос, о которых упоминалось в связи со свойствами четности, нечетности и периодичности функций, вместе с некоторыми другими преобразованиями часто используются при построении графиков функций и графиков уравнений (для графика уравнения отсутствие различных точек с одинаковыми абсциссами не является обязательным, например, окружность с центром в начале координат и радиусом, равным 2, не является графиком функции, но является графиком уравнения $x^2 + y^2 = 4$).

Напомним основные изученные вами преобразования графиков.

№	Переход		Описание преобразования
	от графика	к графику	
1	$y = f(x)$	$y = f(x) + b$	Перенос параллельно оси ординат на b
2	$y = f(x)$	$y = f(x - a)$	Перенос параллельно оси абсцисс на a
3	$y = f(x)$	$y = kf(x), k > 0$	Растяжение от оси абсцисс в k раз
4	$y = f(x)$	$y = f(kx), k > 0$	Сжатие к оси ординат в k раз
5	$y = f(x)$	$y = -f(x)$	Симметрия относительно оси абсцисс
6	$y = f(x)$	$y = -f(-x)$	Симметрия относительно начала координат
7	$y = f(x)$	$y = f(-x)$	Симметрия относительно оси ординат
8	$y = f(x)$	$x = f(y)$	Симметрия относительно прямой $y = x$
9	$y = f(x)$	$y = f(x) $	Симметрия относительно оси абсцисс частей графика, расположенных в нижней полуплоскости
10	$y = f(x)$	$y = f(x)$	Уничтожение части графика слева от оси ординат и дублирование оставшейся части симметрично относительно оси ординат
11	$y = f(x)$	$ y = f(x)$	Уничтожение части графика под осью абсцисс и дублирование оставшейся части симметрично относительно оси абсцисс

Упражнения

447. Какие недостатки вы видите в описании преобразований 3 и 4 в таблице?

Что происходит с расстояниями от точки графика до осей абсцисс и ординат при этих преобразованиях?

448[○]. Проиллюстрируйте каждое из указанных в таблице преобразований конкретными примерами построения графика функции.

449. Какой график вы будете преобразовывать при построении графика уравнения:

$$1) y = (2x + 1)^2; \quad 3) y = \frac{2x - 3}{4x};$$

$$2) y = \frac{3 - 2x}{x}; \quad 4) y = \log_{0,5} (2 - 4|x|)?$$

В каком порядке вы будете применять указанные в таблице преобразования?

450[●]. При преобразовании графика функции $y = f(x)$ в график функции $y = f(2x + 3)$ один ученик сначала перенес график на 3 единицы влево, а затем сжал его к оси ординат в 2 раза, другой сначала сжал исходный график в два раза к оси ординат, а затем выполнил перенос на 3 единицы влево, третий же ученик сначала сжал график в два раза к оси ординат, а затем выполнил перенос влево на 1,5 единицы. Верны ли решения этих учеников? Как бы вы выполнили преобразование графика $y = f(x)$ в график функции $y = f(2x - 3)$?

451[○]. Преобразуйте график функции $y = f(x)$ (рис. 119) в график уравнения:

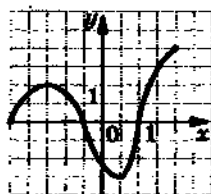


Рис. 119

$$1) y = f(|x| + 1);$$

$$2) y = f(|x + 1|);$$

$$3) y = |f(x)| - 1;$$

$$4) y = |f(x) + 1|;$$

$$5) y = \|f(x)\| - 1;$$

$$6) |y| = \|f(x)\| - 1.$$

452[•]. 1) Задайте аналитически функцию, график которой получается из графика функции $y = x^2$ в результате последовательного выполнения преобразований, указанных в таблице под номерами: а) 1, 3, 8; б) 5, 6, 2, 8; в) ^О1, 6, 4, 9, где $b = -1$ в преобразовании 1, $a = 2$ в преобразовании 2.

2) Выполните эскиз графика, который должен получиться в результате этих преобразований.

3) Задайте сами последовательность каких-нибудь преобразований из первых девяти, указанных в таблице. Выполните для своей последовательности преобразований задания 1 и 2.

453^О. Задайте аналитически какую-нибудь функцию, график которой симметричен относительно: 1) прямой $x = 2$; 2) точки $A(-2; 3)$.

454^О. Чем отличается от графика функции $y = \{x\}$ график кусочно-заданной функции

$$y = \begin{cases} \{x\}, & \text{если } x \text{ — не целое число,} \\ 1, & \text{если } x \text{ — целое число?} \end{cases}$$

• Какие из указанных в таблице преобразований и в каком порядке следует применить, чтобы получить этот график из графика функции $y = \{x\}$?

455. Используя идею преобразования графика, найдите наименьший период следующих функций:

1) $y = \cos 3x$; 3) $y = \lg(4x + 1)$;

2) $y = \sin \frac{x}{5}$; 4) ^О $y = \{0,5x - 4\}$.

456^О. Что произойдет с графиком уравнения с двумя переменными, если в уравнении заменить:

1) x на $-x$; 3) x на $x + 3$; 5) x на $2x$;

2) y на $-y$; 4) y на $y - 3$; 6) y на $0,5y$?

Проиллюстрируйте эти преобразования на примере уравнения окружности $x^2 + y^2 = 4$.

457. 1) Постройте график уравнения: $|x| + |y| = 2$;

2) ^О Отметьте множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$|x| + |y| < 2.$$

458^{*}. Решите графически уравнения:

1) $4 + 2|x| - x^2 = |x + 1|$; 2) $|x + 3| + |x - 1| = 4$.

459^{*}. Найдите все значения a , при которых уравнение $|4 + 2|x| - x^2| = a$ имеет:

1) 2 корня; 2) 4 корня; 3) 5 корней; 4) 6 корней. При каких значениях a уравнение не имеет корней?

Контрольные вопросы и задания

1. Перечислите знакомые вам свойства функций и проиллюстрируйте их эскизами графиков соответствующих функций.

2. Верны ли следующие утверждения о функциях с одинаковыми областями определения: а) сумма двух возрастающих функций — возрастающая функция; б) произведение двух убывающих функций — убывающая функция; в) разность двух четных функций — четная функция; г) произведение двух нечетных функций — нечетная функция. Если вы считаете утверждение верным, постарайтесь его обосновать, если неверным — приведите контрпример.

3. Постройте график функции $y = \left| 2 \cos \left(0,5x + \frac{\pi}{4} \right) \right|$ с помощью преобразований. Укажите наименьший период, наибольшее и наименьшее значения, промежутки монотонности данной функции.

28. Уравнения и неравенства

Уравнения и неравенства люди решают с глубокой древности. Вы познакомились с уравнениями и неравенствами еще в начальной школе и с тех пор научились решать много разных их типов. В большинстве случаев в процессе решения исходное уравнение или неравенство заменяется более простым и так далее, пока не будет приведено к простейшему виду.

При замене одного уравнения или неравенства другим могут встретиться три случая.

1. Множества решений первого и второго уравнения (неравенства) совпадают. Понятно, что эта ситуация самая благоприятная — решения второго уравнения (неравенства) можно сразу записывать в ответ.

Уравнения (неравенства) с одним и тем же множеством решений называют равносильными.

2. Множество решений второго уравнения (неравенства) содержит все решения первого. В этом случае второе уравнение (неравенство) называют *следствием* первого. При этом те решения второго, которые не являются решениями первого, называют *посторонними*, их стараются выявить и отбросить.

Нетрудно заметить, что если следствие не содержит никаких других решений, кроме решений первого, то оно ему равносильно. Можно сказать, что *два уравнения (неравенства) равносильны, если каждое из них является следствием другого*.

3. Множество решений второго уравнения (неравенства) содержит не все решения первого, т. е. теряются решения. Эта ситуация самая неприятная. Возможно, поэтому у нее даже нет специального названия.

Во всех трех случаях множество решений первого уравнения (неравенства) сравнивается с множеством решений второго. Однако обычно, когда мы выполняем преобразование, решений у нас еще нет. И сравниваем мы множества решений, анализируя сами преобразования, которые применяем. Некоторые преобразования не могут изменить множества решений, — такие преобразования называют *равносильными*. Применение других может привести к посторонним решениям или к потере решений, — эти преобразования называют *неравносильными*. Так, например, к равносильным преобразованиям относится замена $\sin^2 x$ тождественно равным ему выражением $1 - \cos^2 x$. А при замене $\sin x$ выражением $\sqrt{1 - \cos^2 x}$ будут потеряны решения (если они есть), при которых $\sin x < 0$, следовательно, это преобразование *неравносильное*.

Заметим, что *неравносильное преобразование может привести и к равносильному уравнению или неравенству, но в этом нельзя быть уверенным, то есть неравносильное преобразование не гарантирует сохранения множества решений*.

В этом пункте мы повторим знакомые преобразования и проанализируем, как и почему следует поступать, чтобы записать в ответ все решения исходного уравнения или неравенства и не записать лишних.

Рассмотрим сначала две основные причины *неравносильности преобразований*.

1. Изменение области допустимых значений переменной (ОДЗ)

Наиболее часто изменение ОДЗ связано с применением формул. Некоторые формулы действуют на всем множестве

действительных чисел, и их применение является равносильным преобразованием. Таковы, например, формулы сокращенного умножения. А вот в формуле $\sin 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$ замена ее левой части, имеющей смысл при любом значении x , ее правой частью приводит к сужению ОДЗ за счет всех $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$), при которых не существует тангенс.

Расширение ОДЗ влечет, например, замена суммы логарифмов $\log_2 f(x) + \log_2 g(x)$ логарифмом произведения $\log_2 (f(x) \cdot g(x))$, поскольку последнее выражение, в отличие от первого, имеет смысл и при отрицательных значениях $f(x)$ и $g(x)$.

Расширение ОДЗ может привести к появлению посторонних решений, а сужение — к потере решений. Чтобы этого избежать, при расширении ОДЗ следует рассматривать дополнительные условия, запрещающие решениям попадать в район расширения. Если же ОДЗ сузилось, — нужно дополнительно поискать решения в районе сужения.

На следующих диаграммах (рис. 120) схематически показаны случаи расширения и сужения ОДЗ. ОДЗ исходного уравнения или неравенства изображено темно-серым цветом, а ОДЗ преобразованного — светло-серым. Точками обозначены решения.

2. Расширение сферы действия правил

Использование правил действий с равенствами и неравенствами иногда предполагает наличие условий, при которых эти правила применимы. Так, например, вы знаете, что обе части



Рис. 120

равенства можно умножить или разделить на отличное от нуля число. Однако при умножении обеих частей уравнения на выражение с переменной множитель может иметь нули, которые объединяются с корнями исходного уравнения. А значит, нули множителя следует проверить отдельно — они могут оказаться посторонними решениями. Кроме того, умножение или деление на выражение с переменной может привести к сужению исходной ОДЗ, о последствиях чего уже упоминалось.

Другим примером расширения сферы действия правил является возведение неравенства в четную степень. Известно, что в четную степень можно возводить неравенство с неотрицательными частями. Выполнив такое преобразование при решении неравенства, следует дополнительно рассмотреть случаи, когда части неравенства принимают отрицательные значения и, кроме того, не забыть, что возведение в четную степень могло расширить ОДЗ.

Упражнения

460. Является ли равносильным преобразование, связанное с заменой выражения а) выражением б)?

Если преобразование неравносильно, укажите причину неравносильности. Запишите дополнительные условия, выполнение которых следует проверить, чтобы избежать появления посторонних решений, или какие случаи следует дополнительно рассмотреть, чтобы не потерять решения:

$$1) \text{ а) } \frac{x^2-1}{x+1}; \text{ б) } x-1; \quad 5) \text{ а) } \sqrt{x^2+1+2x}; \text{ б) } |x+1|;$$

$$2) \text{ а) } x-1; \text{ б) } \frac{x^2-1}{x+1}; \quad 6) \text{ а) } \operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right); \text{ б) } \frac{\operatorname{tg} x + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3} \operatorname{tg} x};$$

$$3) \text{ а) } x+1; \text{ б) } \sqrt{x^2+1+2x}; \quad 7) \text{ а) } \sqrt{1-\sin^2 x}; \text{ б) } \cos x;$$

$$4) \text{ а) } \sqrt{x^2+1+2x}; \text{ б) } x+1; \quad 8) \text{ а) } 1 + \operatorname{tg}^2 x; \text{ б) } \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$9) \text{ а) } f(x) - g(x); \text{ б) } (\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}) (\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)});$$

$$10) \text{ а) } f(x) - g(x) + g(x); \text{ б) } f(x);$$

$$11) \text{ а) } 2 \lg f(x); \text{ б) } \lg f^2(x);$$

$$12) \text{ а) } \lg f^3(x); \text{ б) } 3 \lg f(x);$$

$$13) \text{ а) } \ln(f(x) \cdot g(x)); \text{ б) } \ln f(x) + \ln g(x).$$

461. Является ли равносильным преобразование уравнения а) в уравнение б)?

Если преобразование неравносильно, укажите причину неравносильности. Запишите дополнительные условия, выполнение которых следует проверить, чтобы избежать появления посторонних решений, или случаи, которые следует дополнительно рассмотреть, чтобы не потерять решения.

1) а) $\sqrt{3x^2 + 2x - 1} = 2x - 1$; б) $x^2 - 6x + 2 = 0$;

2) а) $\sqrt{2x + 3} + \sqrt{x - 2} = 4$;

б) $2x + 3 + x - 2 + 2\sqrt{2x + 3} \cdot \sqrt{x - 2} = 16$;

3) а) $\sqrt{2x + 3} + \sqrt{x - 2} = 4$;

б) $2x + 3 + x - 2 + 2\sqrt{(2x + 3)(x - 2)} = 16$;

4) а) $\log_{7-x}(x^3 + 9) = \log_{7-x}((x + 3)(x - 1)^2)$;

б) $x^3 + 9 = (x + 3)(x - 1)^2$;

5) а) $|\sin x| \cos x = \sin^2 x$; б) $\cos x = \sin x$;

6) а) $\log_{\cos x} \sin x + \log_{\sin x} \cos x = 2$;

б) $\log_{\cos x} \sin x + \frac{1}{\log_{\cos x} \sin x} = 2$;

7) а) $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1 - \cos x}{1 - \sin|x|}$; б) $\operatorname{tg}^2 |x| = \frac{1 - \cos|x|}{1 - \sin|x|}$;

8) а) $2 \sin 2x + \cos 2x + 1 = 0$;

б) $\frac{4 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + 1 = 0$.

Завершите решения уравнений 1), 2), 4)—8).

462. Является ли равносильным преобразование неравенства а) в неравенство б)? Если преобразование неравносильно, запишите дополнительные условия, которым должны удовлетворять решения второго неравенства или какие случаи следует дополнительно рассмотреть, чтобы не потерять решения:

1) а) $\frac{(x + 5)^2}{x^2 - 9} > 0$;

б) $x^2 - 9 > 0$;

2) а) $(2x - 3)\sqrt{3x^2 - 5x + 2} > 0$;

б) $2x - 3 > 0$;

3) а) $(2x^2 - 3x - 5)\sqrt{3x + 1} < 0$;

б) $2x^2 - 3x - 5 < 0$;

4) а) $(6x - 5)\sqrt{2x^2 - 7x - 9} \geq 0$;

б) $6x - 5 \geq 0$;

$$5) \text{ а) } (2x^2 + 9x - 11) \lg^2(x - 5) < 0; \text{ б) } 2x^2 + 9x - 11 < 0;$$

$$6) \text{ а) } 5\sqrt{x^2 - 3x + 2} < 5\sqrt{x^2 - 5x + 5}; \text{ б) } x^2 - 3x + 2 < x^2 - 5x + 5;$$

$$7) \text{ а) } \lg(x - 2)^2 < \lg(x^2 - 4) - \lg(-x - 2);$$

$$\text{ б) } 2 \lg(2 - x) < \lg(2 - x);$$

$$8) \text{ а) } \log_{\sin x} \cos x > 1; \text{ б) } \cos x < \sin x.$$

Завершите решение неравенств.

Рассуждения, которые вы проводили при решении уравнений и неравенств, можно при оформлении решения заменить соответствующей математической символикой. Речь идет об употреблении знаков равносильности $\Leftrightarrow$, следования $\Rightarrow$, системы $\{ \}$ и совокупности $[\}$.

Знак равносильности $\Leftrightarrow$ ставится между уравнениями или неравенствами в случае проведения равносильного преобразования, а знак следования $\Rightarrow$ — при неравносильном преобразовании, которое может повлечь за собой появление посторонних решений.

Знак системы $\{ \}$ требует одновременного выполнения указанных с его помощью условий, а знак совокупности $[\}$ показывает, что должно выполняться хотя бы одно из условий. Так, например, условие равенства произведения нулю можно записать символически:

$$f(x) \cdot g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) = 0, \\ x \in \text{ОДЗ.} \end{cases}$$

Заметим, что, если в результате неравносильного преобразования получится равносильное уравнение или неравенство, в записи решения все равно не следует ставить знак $\Leftrightarrow$.

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt{3x - 5} = x - 1$.

$$\begin{aligned} \text{Решение. } \sqrt{3x - 5} = x - 1 &\Rightarrow 3x - 5 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 &\Rightarrow \begin{cases} x = 2, \\ x = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Проверка. При $x = 2$ имеем: $x - 1 = 2 - 1$ больше нуля, следовательно, число 2 — корень данного уравнения. При $x = 3$ имеем: $x - 1 = 3 - 1$ больше нуля, следовательно, число 3 — корень данного уравнения.

Ответ. 2; 3.

Примечание. Как оказалось, первое и второе уравнения в цепочке преобразований равносильны. Однако в момент перехода это еще не было известно, и, следовательно, ошибкой было бы поставить между ними знак « $\Leftrightarrow$ ». Если же нам захочется, чтобы все преобразования были равносильными, решение надо будет оформить, например, так:

$$\sqrt{3x-5} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-5 = x^2 - 2x + 1, \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 6 = 0, \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2, \\ x=3, \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2, \\ x=3. \end{cases}$$

Оформим с помощью символов решение уравнения, с которым вы встретились в № 461.

Пример 2. Решить уравнение

$$2 \sin 2x + \cos 2x + 1 = 0.$$

Решение. Выразим синус и косинус через тангенс половинного аргумента — прием, который называют *универсальной подстановкой*:

$$\begin{aligned} 2 \sin 2x + \cos 2x + 1 = 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + 1 = 0, \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n \ (n \in \mathbb{Z}), \\ 2 \sin (\pi + 2\pi n) + \cos (\pi + 2\pi n) + 1 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \operatorname{tg} x + 2 = 0, \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n \ (n \in \mathbb{Z}), \\ 0 - 1 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n, \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \ (n \in \mathbb{Z}). \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ. $\frac{\pi}{2} + \pi n, -\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n \ (n \in \mathbb{Z})$.

463*. Оформите с помощью символов решение уравнений и неравенств из № 461 и № 462.

464. Объясните, почему не нужно делать проверку корней в следующем решении иррационального уравнения: $\sqrt{3x-5} = x-1, 3\sqrt{3x-5} = 3x-3, 3x-5-3\sqrt{3x-5}+2=0, \sqrt{3x-5} = 1$ или $\sqrt{3x-5} = 2, 3x-5=1$ или $3x-5=4, x=2$ или $x=3$.

Ответ. 2; 3.

465°. Обоснуйте следующие равносильности:

$$1) \sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geq 0; \end{cases}$$

$$2) \sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0, \\ f(x) > g^2(x); \end{cases}$$

$$3) \sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g^2(x); \end{cases}$$

$$4) \log_{x-3} f(x) > \log_{x-3} g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 3 < x < 4, \\ 0 < f(x) < g(x), \\ x > 4, \\ f(x) > g(x) > 0; \end{cases}$$

$$5) \lg(f(x) \cdot g(x)) = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} \lg f(x) + \lg g(x) = 5, \\ \lg(-f(x)) + \lg(-g(x)) = 5; \end{cases}$$

$$6) \log_{g(x)} f(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (f(x) - 1)(g(x) - 1) \geq 0, \\ x \in \text{ОДЗ}; \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) = 0, \\ h(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0, \\ h(x) = 0, \\ g(x) = 0, \\ h(x) = 0. \end{cases}$$

466°. Обоснуйте равносильность

$$\log_{g(x)} f(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (f(x) - 1)(g(x) - 1) > 0, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

и используйте ее в решении неравенств 3 и 5 из № 179.

467°. Запишите, чему равносильно неравенство

1) $\log_{g(x)} f(x) < 0$ и решите с помощью этой равносильности неравенства 4 и 6 из № 179; 2) $\sqrt{f(x)} > g(x)$ и решите с помощью этой равносильности неравенство 7 из № 108.

Контрольные вопросы и задания

1. Приведите два примера равносильных и два примера неравносильных преобразований уравнений и неравенств.

2. Проанализируйте формулы на с. 284 учебника с позиций равносильности-неравносильности их применения в преобразованиях уравнений и неравенств.

ДОМАШНИЕ КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Контрольная работа № 1 (к п. 1—4) (90 мин)

I уровень

1. Является ли y функцией x , если:

а) y — число учеников вашего класса, посетивших урок математики, а x — число учеников вашего класса, подготовившихся к этому уроку;

б) y — число учеников вашего класса, посетивших школу, а x — соответствующее число сентября;

в) x — натуральное число, а y — число, квадрат которого равен x ;

г) x — натуральное число, а y — квадрат числа x ?

Является ли в этих примерах x функцией y ?

2. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 121). Найдите по графику:

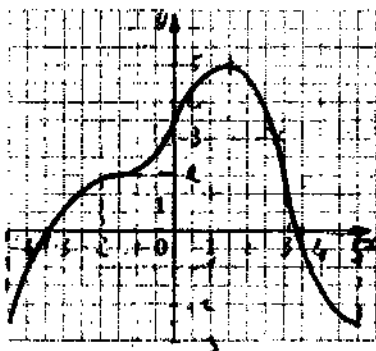


Рис. 121

а) область определения функции;

б) область значений функции;

в) промежутки возрастания и убывания;

г) значение x , при котором значение функции равно 3; 3

д) $f(-2)$; $x = -2 \quad y = 0$

е) нули функции;

ж) наибольшее и наименьшее значение функции.

Задаёт ли этот график x как функцию?

3. Постройте график непрерывной функции $y = f(x)$, если:
 $D(f) = (-4; 3]$, ее наибольшее значение равно 3, а наименьшее -2, функция убывает на промежутке $(-4; 1]$, а возрастает на промежутке $[1; 3]$.

4. Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt{\frac{x^3 - x}{x^2 + 2x - 3}}$; б) $y = \sqrt{1 - x} + \sqrt{x + 3}$.

5. Разрывна ли кусочно-заданная функция

$$y = \begin{cases} x^2, & \text{при } x \leq 1, \\ 2 - x, & \text{при } x > 1? \end{cases}$$

Постройте ее график.

6. С помощью каких преобразований из графика функции $y = \frac{1}{x}$ можно получить график дробно-линейной функции $y = \frac{2x - 1}{x + 1}$? Постройте ее график.

II уровень

7. Определите с помощью графика, сколько корней имеет уравнение: $\sqrt{1 - x} - x^2 - x + 1 = 0$.

8. Решите уравнение: $\sqrt{x + 6} + \sqrt{x - 5} = 11$.

III уровень

9. Найдите наибольшее значение функции

$$y = \frac{1}{\sqrt{2x^2 + 6x + 9}}.$$

10. Постройте график функции $y = x^2 - 2|x| + 4$.

Контрольная работа № 2 (к п. 5—8) (60 мин)

I уровень

1. Докажите нечетность функции

$$y = \sqrt{x^2 - 9} \cdot (x^5 - x).$$

2. Постройте в одной системе координат графики функции $y = 3 - 2x$ и функции, ей обратной.

3. Решите уравнение:

а) $\sqrt[5]{x^3 + 5} = 2$; б) $\sqrt{2x^2 + 4x - 5} = x - 2$.

4. Решите неравенство $\frac{\sqrt[6]{11 + 9x - 2x^2}}{x - 3} > 0$.

5. Сравните значение выражений $\sqrt[6]{6}$ и $\sqrt[4]{4}$.

6. Сократите дроби:

а) $\frac{a - \sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a}}$; б) $\frac{b - 4x^{0,5}}{b^{0,5}x^{0,5} + 2x^{0,75}}$.

II уровень

7. Задайте функцию $y = g(x)$ обратную функции $y = 3 - 2x$ аналитически.

8. Решите уравнение $\sqrt{x + 6} - \sqrt{x - 2} = 2$.

9. Решите неравенство $\sqrt{3x + 7} > x + 1$.

III уровень

10. Упростите выражение

$$\left((xy)^{\frac{1}{2}} - \frac{xy}{x + x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}} \right) : \frac{x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{2}}}{x - y}.$$

Контрольная работа № 3 (к п. 9—11) (90 мин)

I уровень

1. Определите a , если известно, что график функции $y = a^x$ проходит через точку $M(-0,25; 2)$.

2. Решите уравнение:

а) $\log_2 x - \log_{0,5}(x - 2) = 3$; б) $11^{x+2} - 22 \cdot 11^x = 9$.

3. Решите неравенство:

а) $\frac{2^x - 0,25}{3 + x} > 0$; б) $\log_{0,2}(x + 3) > -2$.

II уровень

4. Решите уравнение:

а) $2^x + \frac{5}{2^{x-2}} - 9 = 0$; б) $x^{\log_2 x} = 81$.

5. Решите неравенство:

а) $\log_{x-2} (5-x) > 0$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+4}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2+3x+4}}$.

III уровень

6. Решите неравенство $\log_2 (2+x) > 1-x$.

7. 1) На сколько процентов возрастет вклад в банке за два года, если банк ежемесячно начисляет 3%?

2) ■ Найдите сумму, которая окажется на вкладе через два года, если начальный вклад составил 10 000 р.

Контрольная работа № 4 (к п. 12—20) (50 мин)

I уровень

1. Переведите 1,25л из радианной меры в градусную.

2. Переведите -150° из градусной меры в радианную.

3. Постройте угол, косинус которого равен $\frac{2}{3}$. Выполните измерения с помощью транспортира и запишите общий вид углов, имеющих данный косинус.

4. Приведите к функциям углов от 0° до 45° :

а) $\sin (-252^\circ)$; б) $\cos 1130^\circ$.

5. Используя график функции $y = \sin x$, укажите промежутки, на которых функция: а) возрастает; б) принимает положительные значения.

6. Найдите корни уравнения $2 \sin (x-1) = -\sqrt{2}$, принадлежащие промежутку $[0; 2\pi]$.

II уровень

7. Для каких углов от 0 до 2π выполняется неравенство $\sin \varphi > \operatorname{tg} \varphi$?

8. Найдите угол, который образует с осью ординат прямая, пересекающая оси координат в точках $A(-2; 0)$ и $B(0; \sqrt{12})$.

III уровень

9. Решите уравнение $4 \cos^2 x - \cos x - 5 = 0$.

10. Чему равен $\arcsin(\sin 5)$?

Контрольная работа № 5 (к п. 21—26) (60 мин)

I уровень

1. Найдите $\sin(\alpha + \beta)$, если $\sin \alpha = -\frac{5}{13}$, $\sin \beta = \frac{4}{5}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

и $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$.

2. Вычислите $\frac{\sin 70^\circ + \sin 20^\circ}{\cos 10^\circ \cos 15^\circ - \sin 10^\circ \sin 15^\circ}$.

3. Докажите тождество $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2}{\sin \alpha}$.

4. Найдите все корни уравнения $2 \cos^2 x - \sin x - 1 = 0$, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

II уровень

5. Найдите абсциссы общих точек графиков функций $y = \cos x$ и $y = \cos 2x$.

6. Можно ли утверждать, что если α° — острый угол, то $\sin(\alpha^\circ + 1^\circ) > \sin \alpha^\circ$?

7. Вычислите: $\log_{0,1} \operatorname{ctg} 5^\circ + \log_{0,1} \operatorname{ctg} 15^\circ + \log_{0,1} \operatorname{ctg} 25^\circ + \dots + \log_{0,1} \operatorname{ctg} 75^\circ + \log_{0,1} \operatorname{ctg} 85^\circ$.

III уровень

8. Докажите, что угол между прямыми $y = 2x - 1$ и $y = \frac{1}{3}x + 3$ равен 45° .

9. Решите уравнение:

$$\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x = 2.$$

10. При каких значениях a наибольшее значение функции $y = a \sin x + \cos x$ равно 5?

Итоговая контрольная работа (90 мин)

I уровень

1. Найдите значение выражения $81^{\frac{1}{4}} - 3\sqrt{3} \cdot 3^{\frac{1}{2}}$.

2. Упростите выражение $\frac{a^{\frac{2}{3}} - 16}{\frac{1}{a^{\frac{2}{3}} - 4}} - a^{\frac{1}{3}}$.

3. Упростите выражение $2^{\log_2 7} + \log_5 75 - \log_5 3$.

4. Решите неравенство $(0,25)^{x-3} < \frac{1}{16}$.

5. Укажите промежутки возрастания и убывания функции $y = f(x)$, заданной графиком (рис. 122).

6. Упростите выражение

$$\frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} - \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right).$$

7. Решите уравнение $\log_2(x+1) = 4$.

8. Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{\frac{x-2}{x+1}}.$$

9. Решите уравнение $2 \cos^2 x - 3 \sin x = 0$.

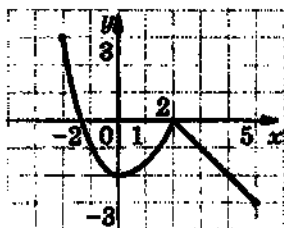


Рис. 122

II уровень

10. Решите уравнение $\sqrt{2x+7} + x = 2$.

11. Найдите значение выражения $\frac{\sin^2 27^\circ - \sin^2 63^\circ}{\sin 18^\circ \cdot \cos 18^\circ}$.

12. Решите уравнение $3 \cdot 9^x - 5 \cdot 6^x + 2 \cdot 4^x = 0$.

13. Решите уравнение $2 \sin^2 x = |\sin x|$.

III уровень

14. Найдите все значения a , при которых уравнение $\log_2(4^x - a) = x$ имеет единственный корень.

15. Найдите наименьшее и наибольшее значения, которые на отрезке $[1; 4]$ принимает функция

$$y = -\frac{1}{\sqrt{2x^2 - 8x + 11}}.$$

Ответы

ГЛАВА



Функции и графики

2. а—г) Нет.

3. y является функцией x , так как каждому числу x соответствует единственная цифра в разряде десятых (поскольку в математике не рассматривают записи типа $0,9999\dots$); x не является функцией y , так как одну и ту же цифру в разряде десятых могут иметь разные числа.

4. y не является функцией x , так как одна и та же сумма цифр может быть у разных двузначных чисел, например, сумма 7 у чисел 25 и 34; x является функцией y , так как каждому двузначному числу соответствует единственная сумма цифр.

5. а) $y = 300 - 50x$. б) Естественная область определения этой функции — множество действительных чисел, а реальная — натуральные числа от 1 до 6 включительно.

6. 1) а) 9; б) 0,5; 2) а) -7; б) 0,25; 3) а) 22; б) 0 и -3; 4) а) 26; б) 1 и -8.

7. а) $D(f) = \{10; 11; \dots; 98; 99\}$; б) $f(17) = 8$, $f(35) = 8$, $f(59) = 14$; в) $f(x) = 3$ при $x = 30$, $x = 21$ и $x = 12$; г) $\max f(x) = f(99) = 18$, $\min f(x) = f(10) = 1$; д) * 9 и 10.

8. Ответы приближенные. Рис. 3: а) $D(f) = [-3,5; 4,5]$; б) $f(-2) = 2,8$; в) $f(-2,2) = 3$; г) $f(-0,25) = f(1,7) = 0$; д) $\max f(x) = 4$, $\min f(x) = -3$; рис. 4: а) $D(f) = [-2,4; 6,5]$; б) $f(-2) = 3,2$; в) $f(-1,9) = f(1,5) = f(3,5) = 3$; г) $f(-1) = f(0,8) = f(5,8) = 0$; д) $\max f(x) = 6$, $\min f(x) = -1,5$; рис. 5: а) $D(f) = [-3; 5,5]$; б) $f(-2) = 0$; в) $f(0,2) = f(2,5) = 3$; г) $f(-2) = f(3,9) = 0$; д) $\max f(x) = 4,5$, $\min f(x) = -1$; рис. 6: а) $D(f) = [-3; 6]$; б) $f(-2) = 2,5$; в) $f(-1,7) = f(-0,2) = f(4,6) = 3$; г) $f(-2,8) = f(1) = -f(3,8) = 0$; д) $\max f(x) = 5$, $\min f(x) = -2,5$; рис. 7: а) $D(f) = [-4,5; 5]$; б) $f(-2) = 1,4$; в) $f(0) = f(2,6) = 3$; г) $f(-3,5) = f(3,3) = 0$; д) $\max f(x) = 4,5$, $\min f(x) = -2,5$; рис. 8: а) $D(f) = [-3; 6]$; б) $f(-2) = -1$; в) $f(3,5) = 3$; г) $f(1,3) = 0$; д) $\max f(x) = 4,5$, $\min f(x) = -3$.

9. 1) $-0,7$ и $2,6$; 2) $2,7$.

10. 1) Любое число, кроме 2 и -2 ; 2) любое число, кроме 1 и 2 ; 3) любое число, кроме 1 , -1 , 2 и -2 ; 4) любое число, кроме 3 и -3 ; 5) $x < 0$; 6) $x > 0$.

11. 1) а) $x \geq 2$; б) $x \geq 2$; в) $x > 2$; г) $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$; д) $[2; 11] \cup (11; +\infty)$; 2) а) $x \geq -3$; б) $x \geq -3$; в) $x > -3$; г) $[-5; 3]$; д) $[-3; 1] \cup (1; +\infty)$.

12. $V = 4x(5 - x)^2$, $D(V) = (0; 5)$.

13. $P = 8 - \frac{2x}{3}$, $D(P) = (0; 3)$; $E(P) = (6; 8)$.

14. 1) а) $[-1; 0]$; б) $[0; 0,5]$; в) $[1; 2]$; г) $[-1; 1]$; д) $(-\infty; 0,5]$; е) $[0; +\infty)$; ж) $x > 0$; 2) а) $[0; 1]$; б) $[-0,5; 0]$; в) $[0; 1]$; г) 0 ; д) $(-\infty; 0]$; е) $[-0,5; +\infty)$; ж) $x > 0$; 3) а) $[-2; 1]$; б) $[-0,5; 1]$; в) $[0; 3]$; г) $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$; д) $(-\infty; 1]$; е) $[-0,5; +\infty)$; ж) $x \neq 0$; 4) а) $[-2; -1]$; б) $[0,5; 1]$; в) $[2; 3]$; г) $[-\sqrt{2}; -1] \cup [1; \sqrt{2}]$; д) $[0,5; 1]$; е) функция не определена; ж) $x < 0$.

15. а) $N \subset Q$; б) $N \subset R_+$; в) $N \cap Z = N$; г) $R_+ \cap Z = N$.

17. 1) $k = 0,3$, а) $l = 7$; б) $l = 8$; в) $l = 4,4$; г) $l = 7,5$;

2) $k = 0,75$, а) $l = -5$; б) $l = 6$; 3) $k = -\frac{3}{7}$, а) $l = 7$; б) $l = \frac{9}{7}$.

19. а) $k > 0$, $l > 0$; б) $k < 0$, $l > 0$; в) $k > 0$, $l < 0$; г) $k < 0$, $l < 0$.

20. 1) Да, при $k = 0$, $l > 0$; 2) да, при $k < 0$, $l = 0$; 3) да, при $k = 0$, $l < 0$; 4) да, при $k > 0$, $l = 0$; 5) нет, график функции $y = kx + l$ не может быть параллелен оси ординат, поскольку при этом одному значению x соответствует более одного значения y ; 6) нет.

21. 1) $y = -1,5x + 0,5$; 2) $y = \frac{9}{5}x + \frac{2}{5}$; 3) $y = 13,5$.

22. 1) а) $(0; 9)$ и $(-12; 0)$; б) принадлежит A , не принадлежит B и C . На графике есть точка с равными координатами; 2) а) $(0; -8)$ и $(-20; 0)$; б) принадлежит B , не принадлежит A и C . На графике есть точка с противоположными координатами.

23. 1) $l = -21$. Проходит; 2) $l = 16$. Не проходит.

24.

4	7,5	50
1,5	0,8	0,12

0,5	0,25	0,125
17,5	35	70

25. 1) $z = \frac{3}{x}$, z и x обратно пропорциональны; 2) $z = \frac{2}{x}$, z и x обратно пропорциональны.

26. 1) $k = 4$; 2) $k = -18$.

27. 1) Да; 2) да.

28. Принадлежат точки: 1) A и M ; 2) A , B , C и P .

31. 1) Две, одну или ни одной; 2) одну.

33. Областями определения.

34. Ошибки в а), г) и е).

35. 1) $y = 0,5x$; 2) $y = -0,5x - 1,5$; 3) $y = 1,5$.

36. $y = \frac{1}{4}x^2$.

37. 1) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 9$; 2) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$.

38. 1) $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 25$; 2) $(x-a)^2 + (y-a)^2 = 25$, где a — любое число; 3) $(x-a)^2 + (y+a)^2 = 25$, где a — любое число.

39. 1) $(-\infty; -\frac{7}{5})$ и $(-\frac{7}{5}; +\infty)$; 2) $(-\infty; -3)$, $(-3; 3)$ и $(3; +\infty)$;

3) $(-\infty; -2)$ и $(-2; +\infty)$; 4) $(-\infty; 1)$, $(1; \frac{4}{3})$ и $(\frac{4}{3}; +\infty)$.

40. 1) 0; 3 и 5; 2) -7; -2 и 0.

41. 3) Разрыв при $x = 1$; 5) разрыв при $x = 2$; 6) разрыв при $x = -2$ и при $x = 1$.

42. 5) Например, $y = \frac{(x-2)(x-5)}{(x-2)(x-5)(x-9)}$.

44. 1) $(-8; 0) \cup (1; +\infty)$; 2) $x < -3$, $0 < x < 7$; 3) $y < -3$, $0 < y < \frac{2}{3}$.

$y > 7$; 4) $-\frac{5}{3} < y < -1$, $\frac{6}{5} < y < 3$; 5) $x < -7$, $-2,5 < x < 1$, $x > 1$;

6) $-1 < x < 0$, $x = \frac{2}{3}$.

45. 1) $t < -\frac{3}{2}$, $-\frac{2}{3} < t < -\frac{1}{3}$; 2) $z < -3$, $-\frac{1}{12} < z < \frac{5}{3}$; 3) $x < -1$,

$-\frac{1}{3} < x < 1$; 4) $x < -2$, $-\frac{19}{17} < x < 3$.

46. 1) $x < -2$; 2) $x = -2$, $x > 2$.

47. Рис. 3: функция возрастает на промежутке $[1; 3]$, убывает на промежутках $[-3, 5; 1]$ и $[3; 4, 5]$; рис. 4: функция возрастает на промежутке $[0; 2]$, убывает на промежутках $[-2, 5; 0]$ и $[2; 6, 5]$; рис. 5: функция возрастает на промежутке $[-2; 1, 5]$, убывает на промежутках $[-3; -2]$ и $[1, 5; 5, 5]$; рис. 6: функция возрастает на промежутках $[-3; -1]$ и $[2, 5; 6]$, убывает на промежутке $[-1; 2, 5]$; рис. 7: функция возрастает на промежутке

$[-4,5; 1,5]$, убывает на промежутке $[1,5; 5]$; рис. 8: функция возрастает на промежутках $[-3; -2]$ и $[0; 6]$, убывает на промежутке $[-2; 0]$.

49. Возрастающими являются функции 1), 4), 5); убывающая — 2.

54. 1) 4; 2) 10.

55. 1) 7; 2) 25.

58. 1) а) $\frac{3}{2} < k < 2$; б) $\frac{2}{3} < k < \frac{3}{4}$; в) $\frac{3}{2} < k < 2$, $\frac{2}{3} < k < \frac{3}{4}$;

2) а) $\frac{2}{7} < k < \frac{2}{5}$; б) $-2 < k < -\frac{2}{3}$; в) $\frac{2}{7} < k < \frac{2}{5}$, $-2 < k < -\frac{2}{3}$.

59. 1) (0; 6); 2) (0; -2); 3) (2; -3); 4) (-3; 14); 5) (2; 11);

6) (-2; 11); 7) (2,5; -12,5); 8) (-7; -24,5).

62. 1) $x_0 > 0$ и $y(0) > 0$; 2) $x_0 < 0$ и $y(0) > 0$; 3) $x_0 > 0$ и $D = 0$; $x_0 > 0$ и $y(0) = 0$; $y(0) < 0$; 4) $x_0 < 0$ и $D = 0$; $x_0 < 0$ и $y(0) = 0$; $y(0) < 0$; 5) $-1 < x_0 < 2$, $y(-1) > 0$, $y(2) > 0$, $D > 0$.

63. 1) а) $k > 4,5$; б) $k = 4,5$; в) таких значений k нет; 2) а) $k < -0,8$; б) $k = -0,8$; в) таких значений k нет.

64. $a > 0$.

65. 1) $0 < a < 1$; 2) $a = 2$, $a < 1$.

66. 1) — 4) Да.

67. 1) $\sqrt{53}$ и $\sqrt{34}$; 2) $\sqrt{2,5}$ и $\sqrt{0,5}$; 3) $\frac{12}{\sqrt{7}}$ и 3; 4) $-\frac{6}{\sqrt{14}}$ и $-\frac{6}{\sqrt{5}}$.

68. $S = 4x - \frac{4x^2}{3}$, $D(S) = (0; 3)$, $E(S) = (0; 3)$.

69. Уравнения асимптот: 3) $y = 2$, $x = -1$; 4) $y = -3$, $x = 1$.

72. 1) $y = f(-x + 6)$; 2) $y = -f(x) - 10$; 3) $y = f(-|x|)$; 4) $|y| = -f(x)$; 5) $y = -f(-x - 6) + 10$; 6) $|y| = -f(-|x|)$.

Г Л А В А



Степени и корни

75. Существует для точек A , B и C .

76. 1) $n = 2$; 2) $n = 3$; 3) $n = 3$; 4) $n = 4$ или $n = 2$; 5) $n = 2$ или $n = 4$; 6) $n = 2$, $n = 3$, $n = 6$; 7) $n = 3$.

77. 1) I, III; 2) I, II; 3) I, II, III; 4) I, II; 5) I, III, IV; 6) I, II.

78. 1) Да, например: $a = 0$, $b = -1$ и $n = 2$; 2) нет.

79. 1) а) I, II; б) I, II, (III), IV; в) I, II; г) I, II, III, (IV); д) I, (II), III, IV; е) III, IV; ж) (I), II, III, IV; з) III, IV. (В скобках указаны четверти, через которые график может пройти лишь при некоторых значениях k , a и b .) 2) а) I, II, III или I, III, IV; б) I, III, IV; в) I, II, III; г) I, II, III или I, III, IV; д) I, II, IV; е) I, II, IV или II, III, IV; ж) II, III, IV или I, II, IV; з) II, III, IV.

80. Четным: 1), 2); нечетным: 3), 4); нельзя определить: 5), 6).

81. 1) $m < n$; 2) $m > n$; 3) $m > n$; 4) $m < n$; 5) нельзя определить.

82. 1) Симметрией относительно оси абсцисс; 2) сжатием в 5 раз к оси абсцисс. Все три функции имеют одинаковую четность.

85. 1) Нечетная; 2) четная; 3) нечетная; 4) ни четная, ни нечетная. Точку разрыва имеют функции 3) и 4).

$$86. 1) y = (4x^6 - 4) + (5x); 2) y = \left(\frac{|x|}{x^6 - 1} \right) + \left(\frac{-2x^8}{x^6 - 1} \right).$$

87. а) Нет; б) нечетными являются произведение и частное четной и нечетной функций.

88. 1) $y = -(|x| - 2)^2 + 5$, при $x \neq 0$. Функция возрастает на промежутках $(-\infty; -2]$ и $(0; 2]$, убывает на промежутках $[-2; 0)$ и $[2; +\infty)$ и имеет разрыв в точке 0.

$$2) y = \begin{cases} 5 - (x - 2)^2, & \text{при } x > 0, \\ (x + 2)^2 - 5, & \text{при } x < 0 \end{cases} \quad \text{или } y = \frac{|x|}{x} (5 - (|x| - 2)^2).$$

Функция возрастает на промежутках $[-2; 0)$ и $(0; 2]$, убывает на промежутках $(-\infty; -2]$ и $[2; +\infty)$ и разрывна в точке 0.

89. Нет.

90. 1) $P(x) = (x - 3)(x + 4)(x + 2)$; 2) $P(x) = (x - 1)(2x - 7)(x + 1)$; 3) $P(x) = (x - 2)(2x - 1)(x + 3)$; 4) $P(x) = (3x + 1)(x - 4)(x + \sqrt{2}) \times (x - \sqrt{2})$; 5) $P(x) = (x + 4)(2x - 3)(x^2 + 1)$.

91. 1) $P(x) = 0$ имеет корни: -4 , -2 и 3 ; $P(x) < 0$ при $x < -4$, $-2 < x < 3$; 2) $P(x) = 0$ имеет корни: -1 , 1 и $\frac{7}{2}$; $P(x) < 0$ при $x < -1$, $1 < x < \frac{7}{2}$; 3) $P(x) = 0$ имеет корни: -3 , $0,5$ и 2 ; $P(x) < 0$ при $x < -3$, $0,5 < x < 2$; 4) $P(x) = 0$ имеет корни: $-\sqrt{2}$, $-\frac{1}{3}$, $\sqrt{2}$ и 4 ; $P(x) < 0$ при $-\sqrt{2} < x < -\frac{1}{3}$, $\sqrt{2} < x < 4$; 5) $P(x) = 0$ имеет корни: -4 и $1,5$ и $P(x) < 0$ при $-4 < x < 1,5$.

92. Да — 1) — 4).

93. 2) $\sqrt[3]{16}$; 3) $-\sqrt[5]{43}$; 6) 0; 7) $1,5$; $\frac{11}{6}$; 8) -2 ; $-0,8$; 9) 0; 1; 4; 5;

10) 0; 1; 8; 9.

95. Принадлежит — 1) — 3).

96. 1) Такого n не существует; 2) $n = 7$.

97. 1) 2; 2) 3; 3) 3; 4) 2 и 4; 5) 2 и 4; 6) 2, 3 и 6; 7) 2, 5 и 10.

98. 1) $m > n$; 2) $m < n$; 3) $m < n$; 4) $m > n$; 5) $m < n$.

99. 1) $y = x$; 2) $y = \frac{1}{x}$; 3) $y = 0,5x + 0,5$; 4) $y = 7,5 - 1,5x$.

101. Да — 1), 2), 5), 6), 7); нет — 3), 4), 8).

102. 1) $-\sqrt[3]{7}$; 2) $-\sqrt[5]{6}$; 3) $-\sqrt[5]{\sqrt{2}-1}$; 5) $-\sqrt[9]{1+a^2}$;

6) $-\sqrt[5]{4-4b+b^2}$; 8) $-\sqrt[9]{c^2-5c+7}$.

103. 1) $x > 0$; 2) $x > 0$; 3) x — любое число; 4) $x \neq 0$; 5) $x > 2,5$;

6) при всех x ; 7) $-5 \leq x \leq 5$; 8) $x < -\frac{1}{2}$; $x > \frac{1}{2}$; 9) $x < -9$, $x > 10$;

10) $-4 \leq x \leq 24$.

104. 1) $x < 0$, $x = 16$; 2) $x = -243$; 3) $x < 0$, $x = 2$; 4) $x \leq -3$, $x = 3$; 5) $-5 < x < 5$, $x = -13$; 6) $x < -7$, $x > 7$, $x = -3$.

105. 1) $\frac{16}{81}$; 2) $\frac{1}{32}$; 3) $-0,4992$; 4) $0,3568$; 5) -5 и 5 ; 6) -4 .

106. 1) -1 ; $-2,5$; 2) нет корней; 3) 1; 4) -2 ; 5) $6,25$; 6) 4; 9; 7) -1 ; 3; 8) -1 .

107. 1) $(-\infty; \frac{3}{4}) \cup (4; 7]$; 2) $x = -8,5$, $-3 < x \leq 1$.

108. 1) $4 < x < 5$; 2) $-7,5 \leq x \leq 5$; 3) $0 < x < 1$; 4) $x > 6$; 5) $x > 4$;

6) $1 \leq x \leq 2,6$; 7) $x \leq -\frac{1}{5}$, $0 < x \leq \frac{7+\sqrt{33}}{8}$; 8) $x < -1$, $x > \frac{4}{9}$.

110. 1) 45; 2) 2,8; 3) 4,4; 4) 6; 5) 20; 6) 2; 7) 15; 8) 12; 9) $\frac{5}{6}$;

10) $\frac{3}{5}$; 11) 3; 12) 1.

111. 1) $2^{11}\sqrt{2}$; 2) $8^4\sqrt{8}$; 3) $a^3\sqrt{a}$; 4) $b^2 \cdot \sqrt[4]{b}$; 5) $ab^2 \cdot \sqrt[5]{ab}$;

6) $-a^4\sqrt{-a}$; 7) $2x^5b^3 \cdot \sqrt[3]{4xb}$; 8) $2a^2b^2 \cdot \sqrt[6]{-2ab^2}$.

112. 1) $\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{3}$; 3) $\sqrt[3]{2|a|}$; 4) $\sqrt[10]{2b^2}$; 5) $\sqrt{4x}$; 6) $\sqrt[3]{2a^2}$;

7) $\sqrt{\sqrt{5}-2}$; 8) $\sqrt[3]{5-2\sqrt{6}}$.

113. 1) $\sqrt[6]{a}$; 2) $\sqrt{a}$; 3) $\sqrt[3]{a^2}$; 4) $\sqrt{b}$; 5) $\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}$; 6) $\sqrt[3]{\frac{1}{a^2}}$.

$$114. 1) \sqrt{3} > \sqrt[3]{5} > \sqrt[4]{8}; 2) \sqrt{2} < \sqrt[3]{3} < \sqrt[4]{5}; 3) \sqrt{3\sqrt{3}} > \sqrt[3]{3\sqrt{3}};$$

$$4) \sqrt[4]{8\sqrt{2}} = \sqrt{2\sqrt[4]{8}}.$$

$$115. 1) \sqrt[5]{2}; 2) \sqrt[12]{\frac{1}{48}}; 3) \sqrt[24]{\frac{3}{8}}; 4) \sqrt[12]{50}; 5) \sqrt[12]{0,1}; 6) \sqrt[20]{160}.$$

$$116. 1) -7; 7; 2) -2; 2; 3) -4; 4; 4) -5; 2; 5) \sqrt[3]{80}; 6) 8; 27.$$

$$117. 1) \sqrt{5}; 2) 2\sqrt{5}.$$

$$118. 1) 7; 2) 4,7.$$

$$119. 1) 0; 2) -18; 17.$$

$$120. 1) x_1 = 1, y_1 = 9; x_2 = 9, y_2 = 1; 2) x_1 = 1, y_1 = 4; x_2 = 4, y_2 = 1; 3) x_1 = 1, y_1 = 27; x_2 = 27, y_2 = 1; 4) x_1 = 1, y_1 = 64; x_2 = 64, y_2 = 1.$$

$$121. 1) a < 0; 2) a < 2, a = \frac{9}{4}.$$

$$122. 1) \sqrt[30]{\frac{1}{b}}; 2) \sqrt[12]{\frac{a^2}{9b}}; 3) \sqrt[6]{2ab}; 4) \sqrt[10]{\frac{ax}{2}}; 5) \sqrt[4]{a^3}; 6) \sqrt[60]{\frac{1}{x}}.$$

$$123. 1) -1; 2) -1.$$

$$125. 1) x^{\frac{1}{8}}; 2) y^{\frac{1}{4}}; 3) a^{\frac{3}{5}}; 4) b^{\frac{5}{6}}; 5) |a|^{\frac{2}{7}} b^{\frac{8}{7}}; 6) b^{\frac{1}{3}} |c|^{\frac{2}{3}}; 7) (-a)^{\frac{3}{2}};$$

$$8) (-y)^{\frac{5}{6}}; 9) 2^{-\frac{1}{7}} a^{\frac{5}{7}} |b|^{-\frac{4}{7}}; 10) 3^{\frac{1}{7}} |c|^{\frac{8}{7}} x^{-\frac{5}{7}}.$$

$$126. 1) \sqrt[3]{a^2}, \text{ где } a > 0; 3) \sqrt[4]{\frac{1}{x^3}}; 4) \sqrt{\frac{1}{a}}; 5) \sqrt[3]{c^5}; 6) \sqrt{\frac{1}{b^3}};$$

$$7) \sqrt[10]{\frac{a^6}{b^7}}, \text{ где } a > 0; 8) \sqrt[10]{\frac{1}{x^8 y^3}}, \text{ где } x > 0; 12) \sqrt[3]{(x+2y)^2}, \text{ где } x+2y > 0.$$

$$127. 1) x^{\frac{3}{4}}; 2) y^{\frac{9}{28}}; 3) c^{\frac{18}{36}}; 4) b^{\frac{7}{30}}; 5) a^2; 6) x^{-2}; 7) b^{\frac{3}{2}}; 8) c^{\frac{1}{2}}.$$

$$128. 1) 27; 2) \frac{1}{25}; 3) 100; 4) 1000; 5) \frac{16}{9}; 6) \frac{8}{27}; 7) 9; 8) 2;$$

$$9) \sqrt{3}; 10) \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$129. 1) а) 2^{-2}; б) 2^{-5}; в) 2^{0,8}; г) 2^{-0,9}; д) 2^{3,5}; 2) а) (\sqrt{2})^{-4}; б) (\sqrt{2})^{-10}; в) (\sqrt{2})^{1,6}; г) (\sqrt{2})^{-1,8}; д) (\sqrt{2})^7; 3) а) 4^{-1}; б) 4^{-2,5}; в) 4^{0,4}; г) 4^{-0,45}; д) 4^{1,75}; 4) а) (0,125)^{\frac{2}{3}}; б) (0,125)^{\frac{5}{3}}; в) (0,125)^{-\frac{4}{15}};$$

г) $(0,125)^{0,3}$; д) $(0,125)^{-\frac{7}{6}}$; 5) а) $(\sqrt[3]{4})^{-3}$; б) $(\sqrt[3]{4})^{-7,5}$; в) $(\sqrt[3]{4})^{1,2}$;
г) $(\sqrt[3]{4})^{-1,35}$; д) $(\sqrt[3]{4})^{5,25}$.

130. 1) а) $\left(\frac{1}{3}\right)^4$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$; в) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{2}{5}}$; г) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{5}{7}}$; д) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2,5}$;
2) а) $(\sqrt[3]{9})^{-6}$; б) $(\sqrt[3]{9})^6$; в) $(\sqrt[3]{9})^{\frac{8}{5}}$; г) $(\sqrt[3]{9})^{-\frac{15}{14}}$; д) $(\sqrt[3]{9})^{5,25}$; 3) а) 3^{-4} ;
б) 3^4 ; в) $3^{\frac{2}{5}}$; г) $3^{-\frac{6}{7}}$; д) $3^{3,5}$; 4) а) $\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{4}{3}}$; б) $\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{4}{3}}$; в) $\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{2}{15}}$;
г) $\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{6}{21}}$; д) $\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{7}{6}}$; 5) а) $(\sqrt[5]{81})^{-5}$; б) $(\sqrt[5]{81})^5$; в) $(\sqrt[5]{81})^{\frac{1}{2}}$;
г) $(\sqrt[5]{81})^{-\frac{25}{28}}$; д) $(\sqrt[5]{81})^{\frac{35}{8}}$.

131. 1) $(a^{0,5})^2$; 2) $(y^{1,5})^2$; 3) $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2$; 4) $\left(b^{-\frac{1}{5}}\right)^2$; 5) $(2c^{0,5})^2$;
6) $(5a^{0,5})^2$; 7) $(8x^{0,5}y^{0,25})^2$; 8) $\left(3b^{\frac{1}{6}}c^{\frac{1}{2}}\right)^2$.

132. 1) $\left(p^{\frac{1}{3}}\right)^8$; 2) $\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^3$; 3) $\left(a^{\frac{1}{4}}\right)^3$; 4) $\left(b^{-\frac{1}{7}}\right)^3$; 5) $\left(2z^{\frac{1}{3}}\right)^3$;
6) $\left(3x^{\frac{1}{3}}\right)^8$; 7) $\left(5a^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{9}}\right)^3$; 8) $\left(10b^{\frac{1}{6}}c^{\frac{1}{8}}\right)^8$.

133. 1) $a^{\frac{3}{4}} - a^{\frac{1}{4}}$; 2) $b^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{6}}$; 3) $x^{\frac{3}{2}} - x + x^{\frac{1}{2}} - 1$; 4) $c^{\frac{5}{6}} - c^{-\frac{5}{6}}$;
5) $a + a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{3}} - a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}} - 1$; 6) $z^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}}$; 7) $a + b$; 8) $x^{\frac{6}{5}} - y^{\frac{1}{2}}$;
9) $4a^{\frac{3}{2}} + 12a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{1}{2}} + 9b$.

134. 1) $\left(10^{\frac{1}{2}}\right)^2 - \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(10^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}}\right)\left(10^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}\right)$; 2) $\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^2 -$
 $-\left(7^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(b^{\frac{1}{2}} - 7^{\frac{1}{2}}\right)\left(b^{\frac{1}{2}} + 7^{\frac{1}{2}}\right)$; 3) $\left(a^{\frac{3}{2}}\right)^2 - 5^2 = \left(a^{\frac{3}{2}} - 5\right)\left(a^{\frac{3}{2}} + 5\right)$;

$$\begin{aligned}
& 4) (x^2)^2 - \left(y^{\frac{3}{2}}\right)^2 = (x^2 - y^{\frac{3}{2}})(x^2 + y^{\frac{3}{2}}); 5) \left(a^{\frac{1}{4}}\right)^2 - 3^2 = (a^{\frac{1}{4}} - 3) \times \\
& \times (a^{\frac{1}{4}} + 3); 6) 5^2 - \left(b^{\frac{1}{6}}\right)^2 = (5 - b^{\frac{1}{6}})(5 + b^{\frac{1}{6}}); 7) \left((3x)^{\frac{1}{2}}\right)^2 - \left(y^{\frac{1}{8}}\right)^2 = \\
& = \left((3x)^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{8}}\right)\left((3x)^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{8}}\right); 8) \left(p^{\frac{1}{10}}\right)^2 - \left(3q^{\frac{1}{8}}\right)^2 = \left(p^{\frac{1}{10}} - 3q^{\frac{1}{8}}\right) \times \\
& \times \left(p^{\frac{1}{10}} + 3q^{\frac{1}{8}}\right); 9) (x^{0,7})^2 - \left(28^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(x^{0,7} - 28^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}\right) \times \\
& \times \left(x^{0,7} + 28^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}\right); 10) \left(7^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}\right)^2 - (a^{-1,2})^2 = \left(7^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} - a^{-1,2}\right)\left(7^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + a^{-1,2}\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 135. 1) 2^3 - \left(a^{\frac{1}{8}}\right)^3 = \left(2 - a^{\frac{1}{8}}\right)\left(4 + 2a^{\frac{1}{8}} + a^{\frac{2}{8}}\right); 2) \left(b^{\frac{1}{8}}\right)^3 + 3^3 = \\
& = \left(b^{\frac{1}{8}} + 3\right)\left(b^{\frac{2}{8}} - 3b^{\frac{1}{8}} + 9\right); 3) \left(10x^{\frac{1}{3}}\right)^3 - \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^3 = \left(10x^{\frac{1}{3}} - 3^{\frac{1}{3}}\right) \times \\
& \times \left(100x^{\frac{2}{3}} + 10x^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} + 3^{\frac{2}{3}}\right); 4) 5^3 + \left(2^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}\right)^3 = \left(5 + 2^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}\right) \times \\
& \times \left(25 - 5 \cdot 2^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}\right); 5) \left(a^{\frac{1}{6}}\right)^3 + 2^3 = \left(a^{\frac{1}{6}} + 2\right)\left(a^{\frac{1}{3}} - 2a^{\frac{1}{6}} + 4\right); \\
& 6) 4^3 - \left(b^{\frac{1}{6}}\right)^3 = \left(4 - b^{\frac{1}{6}}\right)\left(16 + 4b^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{2}{6}}\right); 7) \left(x^{\frac{1}{6}}\right)^3 - \left(z^{\frac{1}{12}}\right)^3 = \\
& = \left(x^{\frac{1}{6}} - z^{\frac{1}{12}}\right)\left(x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{6}}z^{\frac{1}{12}} + z^{\frac{1}{6}}\right); 8) \left(b^{\frac{1}{18}}\right)^3 + \left(2c^{\frac{1}{6}}\right)^3 = \left(b^{\frac{1}{18}} + 2c^{\frac{1}{6}}\right) \times \\
& \times \left(b^{\frac{1}{9}} - 2b^{\frac{1}{18}}c^{\frac{1}{6}} + 4c^{\frac{1}{3}}\right).
\end{aligned}$$

$$136. 1) \frac{1}{1-a^{\frac{1}{2}}}; 2) \frac{1-a^{\frac{1}{2}}}{1-a^{\frac{5}{6}}}.$$

$$137. 1) -\frac{a^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}}; 2) \frac{x^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{1}{3}}}; 3) \frac{a^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}}; 4) \frac{3^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}; 5) a^{\frac{1}{2}} + 5;$$

$$6) \frac{-1}{x^{\frac{1}{2}}+2y^{\frac{1}{2}}}; 7) \frac{3}{a^{\frac{1}{4}}-6}; 8) \frac{y^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}}.$$

$$138. 1) 2,8; 2) 0,75; 3) 13; 4) 29; 5) 1; 6) 2.$$

$$139. 1) \frac{c^{\frac{1}{3}}-1}{c^{\frac{1}{3}}+1}; 2) \frac{y^{\frac{2}{3}}+1}{y^{\frac{1}{3}}}; 3) -b^{\frac{1}{4}}\left(x^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right); 4) -10.$$

$$140. 1) -1; 2) -\frac{4}{3}.$$

$$141. 1) a < 1; 2) a \geq 2.$$

Г Л А В А



Показательная и логарифмическая функции

$$143. \text{ Принадлежат.}$$

$$146. 1) 4; 2) 4; 3) -2; 4) -3; 5) -\frac{2}{3}; 6) \frac{3}{4}; 7) 2,75; 8) 1,2.$$

$$147. 1) 9; 2) \sqrt{5}.$$

$$148. \text{ Проходит.}$$

$$151. 1) \frac{2b\sqrt{5}}{a\sqrt{8}-b\sqrt{5}}; 2) \frac{1}{a^{\frac{\sqrt{8}}{3}}+b^{\frac{\sqrt{5}}{3}}}.$$

$$152. \sqrt{21}.$$

153. 1) Четная; 2) нечетная.

155. 1) $\frac{1}{4}$; 2) 2,5; 3) 3; 4) $-\frac{11}{8}$; 5) 7; 6) нет корней; 7) 9; 8) 4.

156. 1) -1; 2) 3; 3) 1; 4) 4; 5) -1; 6) -2; 7) 1,5; 8) 1,5.

157. 1) 0; 3) -2; 3) 4; 4) 6; 5) 0; 6) -1; 1.

158. 1) $x = y = -2$; 2) $x = \frac{18}{19}$, $y = -\frac{30}{19}$; 3) $x = 4$, $y = 3$;

4) $u_1 = v_1 = -4$, $u_2 = v_2 = 3$.

159. 1) $x < -4$; 2) $x < 6$; 3) $x > 0$; 4) $x \geq 0$; 5) $x < -3$, $x > -1$;

6) $x < -1$, $4 \leq x < 5$; 7) $x \leq 2$; 8) $x < 0$, $x \geq 1$; 9) $x < 1$; 10) $x > 2$.

160. 1) $x < 0$, $x \geq 3$; 2) $x < -2$.

161. 1) $a > 1$ и $a \neq 2$; 2) ни при каких; 3) $a < 1$, $a = 2$.

162. 1) $(1,03^x - 1) \cdot 100\%$; 2) $\approx 42,6\%$.

163. 1) а) 2; б) 4; в) 3; г) -3; д) -3; е) 0,25; ж) -6; 2) а) 2; б) 3;

в) 3; г) -2; д) -4; е) $\frac{1}{6}$; ж) -9.

164. 1) а) $\log_2 2$; б) $\log_2 4$; в) $\log_2 8$; г) $\log_2 1$; д) $\log_2 0,5$;

е) $\log_2 0,25$; ж) $\log_2 0,125$; з) $\log_2 \sqrt{2}$; и) $\log_2 \sqrt[3]{2}$; к) $\log_2 \frac{1}{\sqrt{2}}$;

л) $\log_2 \sqrt[3]{4}$; 2) а) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$; б) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$; в) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}$; г) $\log_{\frac{1}{2}} 1$; д) $\log_{\frac{1}{2}} 2$;

е) $\log_{\frac{1}{2}} 4$; ж) $\log_{\frac{1}{2}} 8$; з) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}}$; и) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$; к) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2}$; л) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$;

3) а) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{2}{3}$; б) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{4}{9}$; в) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{8}{27}$; г) $\log_{\frac{2}{3}} 1$; д) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{8}{2}$; е) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{9}{4}$;

ж) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{27}{8}$; з) $\log_{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{2}{3}}$; и) $\log_{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$; к) $\log_{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{3}{2}}$; л) $\log_{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{\frac{4}{9}}$;

4) а) $\log_4 4$; б) $\log_4 16$; в) $\log_4 64$; г) $\log_4 1$; д) $\log_4 0,25$; е) $\log_4 \frac{1}{16}$;

ж) $\log_4 \frac{1}{64}$; з) $\log_4 2$; и) $\log_4 \sqrt[3]{4}$; к) $\log_4 \frac{1}{2}$; л) $\log_4 \sqrt[3]{16}$;

5) а) $\log_{\frac{1}{27}} \frac{1}{27}$; б) $\log_{\frac{1}{27}} \frac{1}{729}$; в) $\log_{\frac{1}{27}} \frac{1}{27^3}$; г) $\log_{\frac{1}{27}} 1$; д) $\log_{\frac{1}{27}} 27$;

е) $\log_{\frac{1}{27}} 729$; ж) $\log_{\frac{1}{27}} 27^3$; з) $\log_{\frac{1}{27}} \frac{1}{\sqrt{27}}$; и) $\log_{\frac{1}{27}} \frac{1}{3}$; к) $\log_{\frac{1}{27}} \sqrt{27}$;

л) $\log_{\frac{1}{27}} \frac{1}{9}$; 6) а) $\log_{x+1} (x+1)$; б) $\log_{x+1} (x+1)^2$; в) $\log_{x+1} (x+1)^3$;

г) $\log_{x+1} 1$; д) $\log_{x+1} \frac{1}{x+1}$; е) $\log_{x+1} \frac{1}{(x+1)^2}$; ж) $\log_{x+1} \frac{1}{(x+1)^3}$;

$$3) \log_{x+1} \sqrt{x+1}; \quad \text{н)} \log_{x+1} \sqrt[3]{x+1}; \quad \text{к)} \log_{x+1} \frac{1}{\sqrt{x+1}};$$

$$\text{п)} \log_{x+1} \sqrt[3]{(x+1)^2}.$$

$$165. 1) 2; 2) \frac{1}{3}; 3) \sqrt[6]{5}; 4) \frac{1}{\sqrt[3]{7}}.$$

$$166. 1) 1; 2) \frac{70}{9}; 3) -2; 5) 1; -6; 5) -\frac{2}{3}; 8) 6) \frac{3}{2}; \frac{5}{2}.$$

$$167. 1) \log_2 5; 2) \log_{0.5} 7; 3) \log_5 2 - 1; 4) \log_{\frac{1}{7}} 3.$$

$$168. 1) x < \log_{\frac{1}{2}} 3; 2) x < \log_3 256; 3) x > \log_3 -\sqrt{8} 6;$$

$$4) x > \log_{\sqrt{15}} -3 6.$$

$$171. 1) \log_8 \frac{7}{8} > \log_8 \frac{6}{7} > \log_7 \frac{6}{7}; 2) \log_8 \frac{9}{8} < \log_8 \frac{8}{7} < \log_7 \frac{8}{7}.$$

$$172. 1) x < -1, x > -\frac{3}{7}; 2) -\frac{7}{17} < x < 1; 3) -\frac{3}{2} < x < 1, \\ 1 < x < \frac{3}{2}; 4) x < 1, 1 < x < \frac{3}{2}; 5) -2 < x < -1, -\frac{3}{7} < x; \\ 6) -\frac{7}{17} < x < 1; 7) \frac{2}{3} < x < 1, 1 < x < 3; 8) \frac{1}{3} < x < 3, 3 < x < 4.$$

$$173. 1) \log_2 10; 2) \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{3}} 2; 3) 1; \log_5 3; 4) 1; \log_2 5; \\ 5) 0; \log_{\frac{2}{3}} 5; 6) 0; 7) -1; \log_{10} 2.$$

$$174. 1) 2; 2) 0.$$

$$175. 1) a \geq 0, a = -\frac{1}{4}; 2) -\frac{1}{4} < a < 0.$$

$$176. 1) x > 23; 2) x > 6; 3) -2 < x < 7; 4) 0.99 < x < 1; \\ 5) 0 < x < 3; 6) x < -2, x > 7; 7) x > 6; 8) 2 < x < \frac{1+\sqrt{13}}{2}.$$

$$178. 1) 25 < x < 36; 2) 0 < x < 4, x > 9; 3) 0 < x < 0.16, \\ 1 < x < \frac{7}{8}; 4) \frac{3}{7} \leq x < 0.81, x \geq 1; 5) -\sqrt{10} < x < -3, \sqrt{10} < x \leq 10; \\ 6) -3 < x < -\sqrt{8}, -1 < x < \sqrt{8}.$$

$$179. 1) 4 < x < 6; 2) 4 < x < 6; 3) -3 < x < -2, x > 2; 4) -4 < x < \\ < -3, -2 < x < -1, 1 < x < 2; 5) x > \frac{-3+\sqrt{29}}{2}; 6) 1 < x < \frac{-3+\sqrt{29}}{2}; \\ 7) 3 < x < 4; 8) 2 < x < 3, x > 6; 9) 0 < x < 0.5, 1 < x < 2, 3 < x < 6; \\ 10) 1 < x < 2, 2 < x < 3, 3 < x < 5; 11) 1 < x < 2, 2 < x < 3, \\ 3 < x < 4, x \geq 5.$$

180. 1) $1 < x < \frac{4}{3}$; 2) $-0,5 < x < 0$; 3) $x > 14,5$; 4) $x > 4,5$;

5) $x < -11$.

182. 1) 1; 2) -2; 3) 2; 4) 2; 5) 2; 6) 2; 7) 8; 8) 6; 9) 2.

183. 1) $4a$; 2) $2a$; 3) $7,5a$; 4) $-4a$; 5) $\frac{1}{a}$; 6) $1 - a$; 7) $\frac{a}{1-a}$;

8) $\frac{3-2a}{1+3a}$.

184. 1) $3a + b$; 2) $\frac{3-3a}{b+1}$.

185. 1) 13,5; 2) 20,25.

186. 1) 5; 2) 1023.

188. 2.

189. 1) $\log_7 8 > \log_8 9$; 2) $\log_7 6 < \log_8 7$.

190. 1) 64; 2) $10\sqrt{10}$; 3) $\sqrt{3}$; 4) 9; $\frac{1}{9}$; 5) 9; 6) 1; 7) 2; 8) 20;

9) 2; 10) 3; -3; 11) 1; 12) $-\frac{5}{4}$; 13) $\sqrt{3}$; 14) 4; $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$; 15) $\frac{1}{12}$; 16) 9; $\frac{1}{27}$;

17) 16; 18) 3; $\frac{1}{9}$.

191. 1) 100; 0,01; 2) 2; $\frac{1}{8}$; 3) 3; 27; 4) 100; 0,1; 5) 3; $\frac{1}{9}$;

6) 0,5; 4; 7) 0,00001; 1000; 8) $\frac{1}{\lg 0,07}$; 9) $\frac{2}{\log_3 1,5}$; 10) $\log_5 \frac{3}{25}$;

11) 1; $n^{\frac{n}{n-1}}$; 12) 1; 22.

192. 9.

193. $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$; a) 100; 6) 10.

194. 1) -100; 2) -1000.

195. 1) $3 < x < 4,5$; 2) $-1 < x < \frac{2}{3}$; 3) $-2 < x < \frac{2}{7}$; 4) $\log_3 \frac{4}{3} < x <$

$< \log_3 28$; 5) $x < \log_4 (\sqrt{3} - 1)$, $x > 1,5$; 6) $0 < x < 1$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2} < x < 2$;

7) $1 < x < 2^{\sqrt[3]{4}}$; 8) $\log_4 13 < x < 2$; 9) $4 < x < 10$; 10) $-\sqrt{2} < x < -1$,

$1 < x < \sqrt{2}$.

196. 1) 1,115; 2) 21,17; 3) 0,01531; 4) 4,052; 5) 0,2863;
6) 7,038.



Тригонометрические функции и их свойства

201. 1) 960° ; 2) 1440° .

202. 3) $190^\circ + 360^\circ \cdot (-1)$; 5) $320^\circ + 360^\circ \cdot 8$; 7) $70^\circ + 360^\circ \cdot (-7)$.

203. 3) $-110^\circ + 360^\circ \cdot (-1)$.

204. 1) 40° ; 400° ; 760° ; -320° ; -680° .

205. а) $30^\circ + 90^\circ n$; б) $30^\circ + 120^\circ n$, n — любое целое число.

206. 1) P_{-70° ; а) наименьшее по модулю значение $\beta = 70$; б) наименьшее положительное значение $\beta = 290$; 2) P_{110° ; 3) P_{250° .

207. 1) 4,8 с; 2) 5; 3) 24 с.

208. 5) $\frac{25\pi}{36}$; 7) $-\frac{5\pi}{4}$.

209. 3) 36° ; 9) $114,6^\circ$.

210. 3) $\frac{5}{4}\pi$; 5) $-\frac{2}{3}\pi$; 9) $-\frac{251}{18}\pi$.

213. 3) $\approx -1,4$; 5) $\approx 4,375$; 7) $\approx 18,025$; 9) ≈ -28 .

215. 2) $197,7^\circ$; 3) $-93,2^\circ$; 4) 303° .

216. Общий вид углов поворота, переводящих точку P в точку M : $\alpha^\circ = 90^\circ + 360^\circ n$, n — любое целое число.

217. $\omega \approx 0,26$ рад/ч, $v \approx 1700$ км/ч.

221. 5) II четверть, $\cos \alpha < 0$, $\sin \alpha > 0$; 7) II четверть; 8) I четверть.

222. 5) $\cos \beta > 0$, $\sin \beta < 0$.

224. 1) а) $156^\circ + 360^\circ n$ и $24^\circ + 360^\circ n$, n — целое число; 2) а) $45^\circ + 360^\circ n$ и $135^\circ + 360^\circ n$, n — целое число.

226. 1) $\cos 72^\circ \approx 0,31$, $\sin 72^\circ \approx 0,95$; 4) $\cos 215^\circ \approx -0,82$, $\sin 215^\circ \approx -0,57$.

228. 1) 3; 3) 1; 5) 0.

229. 1) Синус равен косинусу для углов 45° и 225° ; 2) синус противоположен косинусу для углов 135° и 315° ; 4) синус больше косинуса для углов между 45° и 225° .

232. 1) Да; 3) нет; 7) нет; 8) да.

233. 3) $\varphi = \frac{3\pi}{2}$.

234. 1) $\varphi = \pi n$, n — любое целое число.

235. 1) $\frac{\pi}{2} + \pi n$; 3) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, n — любое целое число.

5) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k < \varphi < \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$; 6) $\pi + 2\pi k < \varphi < 2\pi(k+1)$, $\varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$.

239. 9) Положительное; 10) отрицательное.

242. 3) -1,4; 5) 1,4; 6) -3,7.

243. 1) $52,43^\circ + 180^\circ n$; 3) $-21,80^\circ + 180^\circ n$, n — любое целое число.

244. 1) Для углов 45° , 135° , 225° и 315° ; 2) нет таких углов; 3) для углов между 45° и 90° , между 135° и 180° , между 225° и 270° , между 315° и 360° ; 4) для углов между 0° и 45° , между 90° и 135° , между 180° и 225° , между 270° и 315° .

246. 1) Нет; 2) да; 3) нет; 4) нет.

249. 4) 0.

251. 3) $\frac{\pi}{4} + \pi n$, n — любое целое число.

252. 3) $\varphi = \frac{2\pi}{3}$, $\varphi = \frac{5\pi}{3}$; 5), 6) $2\pi n < \varphi < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

253. 1) $\varphi = \frac{\pi}{2} n$; 3) $\varphi = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $\frac{\pi}{2} + \pi n$, n — любое целое число;

5) $-\frac{\pi}{2} + \pi n < \varphi < \pi n$, n — любое целое число.

254. 2) а) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 3$; в) $y = -\sqrt{3}x + 3$.

255. 2) $\operatorname{tg} 1 > \operatorname{tg} 2$; 3) $\sin 15^\circ < \sin 15$; 4) $\cos 3 < \cos 4$.

259. 3) Отрицательна.

260. 1) $-\frac{\pi}{4} < \frac{1}{2} \arcsin p < \frac{\pi}{4}$; 4) $\pi < \pi + \operatorname{arccotg} p < 2\pi$.

261. 2) $\frac{5\pi}{6}$.

262. 1) $\frac{\pi}{6}$; 3) 1.

263. 3) 0.

265. 1) $\alpha = \beta$; 2) $\alpha = \beta$.

266. 1) $a \in [-1; 1]$; 3) $a \in \mathbb{R}$.

267. 3) $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{11\pi}{6}$.

268. Нет.

271. 1) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $-\arcsin \frac{1}{4} + 2\pi n$, $\pi + \arcsin \frac{1}{4} + 2\pi n$, n — любое целое число; 2) $2\pi n$, n — любое целое число.

275. 1) $\sin 34^\circ - \cos 34^\circ$; 2) $2 \operatorname{ctg} 20^\circ$.

276. 1) $-\operatorname{tg} x$; 3) $\operatorname{ctg} \varphi$.

277. 1) а) $\sin 120^\circ \approx 0,866$, $\cos 120^\circ \approx -0,5$, $\operatorname{tg} 120^\circ \approx -1,732$.

282. 4) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

283. 2) $\frac{4\pi}{7}$; 3) $\frac{\pi}{2} - 6 + 2\pi$; 4) $10 - 3\pi$; 5) $\frac{\pi}{2} - 10 + 3\pi$.

289. 1) $x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, n — любое целое число; 3) не имеет решения.

290. Общий вид уравнения оси симметрии $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, k — любое целое число.

291. Общий вид абсцисс центров симметрии $x = \pi n$, где n — любое целое число.

295. 1) $y_{\max} = 2$, $y_{\min} = -2$; 3) $y_{\max} = 1,5$, $y_{\min} = -0,5$; 5) $y_{\max} = 6$, $y_{\min} = 3\frac{3}{4}$.

296. 1), 4) — нечетные; 2), 3) — четные.

298. $a > 5$.

299. 1) $-0,5 < a < 0,5$; 2) $a > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

301. Функция $y = \cos x$ четная, а функция $y = \cos \pi x$ нечетная.

306. 1) $x \neq 2\pi n$, n — любое целое число; 2) $x \neq \pi + 2\pi n$, n — любое целое число; 3) нет решений; 4) нет решений.

307. Общий вид уравнения оси симметрии $x = \pi n$, n — любое целое число.

308. Абсциссы некоторых центров симметрии $x = \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$.
Общий вид абсцисс центров симметрии: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, n — любое целое число.

310. 1) 0,4 и 0; 3) 1 и $\frac{1}{3}$; 4) 1 и 0,2.

313. 1) π ; 2) 4π .

314. а) Четные функции 1), 5) и 6); б) нечетная функция 2).

$$315. 1) -\frac{5\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; 2) -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; 3) -\frac{\pi}{6} + 2\pi k \leq x \leq \frac{7\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; 4) \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \leq x \leq \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$316. 1) \frac{\pi}{12} + \pi n < x < \frac{5\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; 2) \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3} \leq x \leq \frac{4\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}; 3) -\frac{\pi}{2} + 4\pi n \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}; 4) -\frac{5\pi}{24} + \pi n < x < \frac{13\pi}{24} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$322. 1) -\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; 2) -\frac{\pi}{3} + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; 3) -\frac{\pi}{2} + \pi n < x \leq -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; 4) \frac{\pi}{3} + \pi n < x < \pi + \pi n, n \in \mathbb{Z}; 5) \operatorname{arctg} 3 + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; 6) \operatorname{arctg}(-3) + \pi n \leq x < \pi + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$329. 1) \text{ а) } \frac{\pi}{4}; \text{ б) } \frac{5\pi}{4}; \text{ в) } \frac{9\pi}{4}; \frac{13\pi}{4}; 3) \text{ а) } \operatorname{arctg} 2; \text{ б) } \pi + \operatorname{arctg} 2; \text{ в) } 2\pi + \operatorname{arctg} 2; 3\pi + \operatorname{arctg} 2.$$

$$330. 1) \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}; 2) \text{ Таких } x \text{ нет}; 3) \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

$$332. 1) \text{ Функция возрастает на промежутках: } \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \frac{11\pi}{6} + 2\pi n\right) \text{ и убывает на } \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}; 2) \text{ функция возрастает на промежутках } (-\pi + 4\pi n; \pi + 4\pi n) \text{ и убывает на } (\pi + 4\pi n; 3\pi + 4\pi n), n \in \mathbb{Z}; 4) \text{ убывает на } \left(\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{7\pi}{6} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}.$$

$$333. 1) \frac{\pi}{2}; 2) \pi; 3) \pi; 4) \pi.$$

$$334. 1) \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right); 2) \left(0, 6; \frac{\pi}{2}\right).$$

$$335. 1) \text{ Могут}; 2) \text{ могут}.$$

$$336. 1) \cos \alpha = \frac{33}{65}; \operatorname{tg} \alpha = \frac{56}{33}; \operatorname{ctg} \alpha = \frac{33}{56}; 3) \sin \alpha = \frac{35}{37}; \operatorname{tg} \alpha = -\frac{35}{12}; \operatorname{ctg} \alpha = -\frac{12}{35}; 5) \sin \alpha = -\frac{24}{25}; \cos \alpha = -\frac{7}{25}; \operatorname{ctg} \alpha = \frac{7}{24}.$$

$$337. 5) 1 - \sin \beta; 7) \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha; 9) \operatorname{tg}^6 \beta; 11) \frac{2}{\sin \beta};$$

$$13) \frac{1}{\sin \beta}; 15) \frac{2}{|\sin \alpha|}.$$

$$338. 1) -7; 2) 0.$$

$$340. 1) 0; 3) 1; 5) 1.$$

$$341. 5) \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; 8) -\operatorname{arctg} \left(\frac{3}{2} \right) + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$9) \pm \arccos \frac{3}{5} + 2\pi n, \pm \arccos \frac{4}{5} + 2\pi n (n \in \mathbb{Z}); 10) \arccos \frac{5}{13} + 2\pi n,$$

$$\pm \arccos \left(-\frac{12}{13} \right) + 2\pi n (n \in \mathbb{Z}).$$

$$343. 1) 7; 2) 47.$$

$$344. 1) \text{ Не могут; } 2) \text{ могут.}$$

$$346. 3) \sqrt{2}; 4) \sqrt{(\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2}.$$

$$347. 11) -\sin \varphi.$$

$$348. 1) \frac{117}{125}; 3) \frac{33}{65}; 5) \frac{31\sqrt{2}}{50}.$$

$$350. 1) \frac{171}{221}; 2) \frac{4+3\sqrt{3}}{10} \text{ и } \frac{-4+3\sqrt{3}}{10}.$$

$$351. 1) \frac{204}{325}; 2) -\frac{17}{145}.$$

$$352. 3) \sqrt{2} \cos \alpha.$$

$$353. 4) \cos \beta.$$

354. 1) Значение первого выражения больше значения второго; 2) значение первого выражения больше значения второго; 3) значения выражений равны.

$$355. 1) 1; 2) -1.$$

$$356. 1) \frac{\sqrt{2}}{2}; 3) \frac{1}{2}.$$

$$357. \pm \frac{5\pi}{18} + \frac{2}{3}\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$358. 105^\circ.$$

$$364. 3) \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}; -\frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}.$$

$$365. 1) \frac{3+2\sqrt{3}}{2-3\sqrt{3}}; 3) \frac{1-1,5\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1,5}.$$

$$366. 1) \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}; 3) -\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}.$$

$$367. 1) a) \frac{17}{19}; b) -\frac{171}{140}.$$

$$368. 1) \frac{1}{3}; 3) \frac{1}{7}.$$

$$369. 1) 17,2.$$

$$370. 90^\circ.$$

$$371. 1) 1; 3) \sqrt{3}.$$

$$375. 3) \operatorname{arctg} 2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$377. 1) \operatorname{tg} 55^\circ; 2) \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{ctg} 10^\circ.$$

379. 2) Угловые коэффициенты k_1 и k_2 взаимно перпендикулярных прямых связаны соотношением $k_1 \cdot k_2 = -1$.

$$380. 9) \cos^2 \frac{\pi}{14} - \sin^2 \frac{\pi}{14}; 11) \frac{2 \operatorname{tg} 0,15\pi}{1 - \operatorname{tg}^2 0,15\pi}; 13) 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2};$$

$$15) 2 \sin \frac{3\alpha}{2} \cos \frac{3\alpha}{2}; 17) 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha+\beta}{2}; 19) 2 \sin \left(\frac{\pi}{8} - \frac{\varphi}{2} \right) \times$$

$$\times \cos \left(\frac{\pi}{8} - \frac{\varphi}{2} \right).$$

$$381. 1) 0,96; 3) \frac{3}{4}; 5) -\frac{24}{7}.$$

$$383. 3) \sin 24^\circ; 5) \frac{\sqrt{2}}{2}; 7) -\cos 40^\circ; 9) \frac{\sqrt{2}}{2}; 11) \cos \alpha; 13) \cos 2\alpha;$$

$$15) \operatorname{tg} 20^\circ; 17) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

$$384. 3) \cos 10^\circ - \sin 10^\circ; 5) \frac{1}{\cos 20^\circ}; 7) \cos 5^\circ; 8) \cos 25^\circ - \sin 25^\circ.$$

$$385. 1) \sin 20^\circ; 2) \frac{\cos 40^\circ}{8}; 3) \frac{\sin 32\alpha}{32 \sin \alpha}.$$

$$386. 1) \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}; 2) \frac{\pi}{2} + \pi k, -\arcsin \frac{1}{4} + 2\pi k, \pi + \arcsin \frac{1}{4} +$$

$$+ 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$387. 1) 30; 2) 150.$$

$$388. 1) \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; 4) \pi + 2\pi n, \text{ где } n \in \mathbb{Z}.$$

$$389. 1) \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}; 2) \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

393. 1) Может, так как $\sin 2x = 2 \sin 24^\circ < 2 \sin 30^\circ = 1$;
 2) не может, так как $\sin 2x < 2 \sin 34^\circ$ при любом x , так как $2 \sin 34^\circ > 2 \sin 30^\circ = 1$; 3) да; 4) нет.

395. Наибольшее и наименьшие значения функции: 1) 1 и -1;
 3) $\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$; 5) $\frac{1}{4}$ и $-\frac{1}{4}$.

$$398. 1) 2 \cos 45^\circ \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{6}}{2}; \quad 5) 2 \sin \frac{11\pi}{120} \cos \frac{\pi}{120};$$

$$8) 2 \cos 3\alpha \cos \alpha.$$

$$401. 1) \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{4}, 2) \frac{\sqrt{2} - 1}{4}.$$

$$404. 1) \frac{3}{16}; 2) 3.$$

$$405. 1) \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}; 3) \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}; 5) \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$406. 1) \frac{\pi n}{2}, \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$407. 1) \sin^2 4\alpha; 2) \sin 4\alpha \sin 5\alpha; 3) \sin 7\alpha \sin 8\alpha.$$

$$408. 1) \frac{\sin 8\alpha}{2}; 2) \sin 4\alpha \cos 5\alpha; 3) \sin 8\alpha \cos 7\alpha.$$

409. 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\sin 80^\circ \cos 70^\circ$. Аргументы слагаемых составляют арифметическую прогрессию, а аргумент множителя равен ее полуразности.

$$411. 1) \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}; 2) \frac{\pi n}{2}, \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}.$$

$$412. 1) -\pi; -\frac{\pi}{2}; 0; \frac{\pi}{2}; \pi.$$

$$413. 1) \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; 2) \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; 3) \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}; 4) \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$414. 1) \pi + 2\pi n; \pm \frac{\pi}{8} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; 2) (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; 3) -\operatorname{arctg} 3 + \pi n, \operatorname{arctg} 2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}; 4) \operatorname{arctg} 2,5 + \pi n, -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; 5) 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; 6) \text{ корней нет}; 8) \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

$$415. 1) -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; 2) \pi n, \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; 3) -\operatorname{arctg} 2 + \pi n, \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; 4) \frac{\pi}{2} + \pi k, \pm \frac{\pi}{8} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$416. 1) -\frac{\pi}{4} + \pi n, \operatorname{arctg} \frac{3}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; 2) \frac{\pi}{4} + \pi n, -\operatorname{arctg} 5 + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$417. 1) \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; 2) \pi n, n \in \mathbb{Z}; 3) \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; 4) \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$418. 1) 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; 2) \frac{\pi}{2} + \pi n, \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; 3) \frac{\pi n}{2}, \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; 4) \frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}.$$

$$419. 1) \frac{2\pi n}{3}, (2n+1)\frac{\pi}{11}, n \in \mathbb{Z}; 2) \frac{2\pi n}{9}, n \in \mathbb{Z}; 3) \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}; 4) \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z}; 5) \frac{7\pi}{48} + \frac{\pi n}{2} \text{ или } \frac{\pi}{96} + \frac{\pi}{8}(2n-1), n \in \mathbb{Z}; 6) \frac{3\pi}{10} + \frac{4\pi n}{5}; -\frac{5\pi}{6} + \frac{4\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}.$$

$$420. 1) -\frac{\pi}{2} - 2\pi n \text{ или } \frac{\pi}{14} + \frac{2\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z}; 2) \frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z}.$$

$$423. 1) \pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}; 2) \frac{\pi}{2} + 2\pi n, (-1)^n \arcsin \frac{1}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; 3) \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; 4) \pi n, \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; 5) \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; 6) -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}; 7) (-1)^n \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{8} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; 8) \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z}; 9) \arctg 3 + \pi n, \arctg 7 + \pi n, n \in \mathbb{Z}; 10) \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5}k, \frac{\pi}{7} + \frac{2\pi}{7}k, \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}k, k \in \mathbb{Z}; 11) \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; 12) \frac{\pi}{4} + \pi n, \arctg \frac{1}{7} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; 13) \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5}n, n \in \mathbb{Z}; 14) \arctg(\sqrt{3}-1) + \pi n, -\arctg(\sqrt{3}+1) + \pi n, n \in \mathbb{Z}; 15) x = \pi n, n \in \mathbb{Z}; 16) -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; 17) \pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}; 18) -\frac{\pi}{4} + \pi n, \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$424. \frac{\pi}{12}.$$

$$425. 0, \pm \frac{\pi}{2}.$$

$$426. \pm \pi.$$

$$427. 1) \pi, \frac{7\pi}{6}; 2) \frac{\pi}{2} \text{ и } \frac{\pi}{6}.$$

$$428. a = \pm 2\sqrt{6}.$$

$$429. 1) (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; 2) \pi n, n \in \mathbb{Z}; 3) \frac{\pi}{4} + \pi n, \pm \frac{2\pi}{9} + \frac{2}{3}\pi n, n \in \mathbb{Z}; 4) \log_2 \left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4} \right), n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Повторение

430. 1) $x \neq 1$; 2) $x \neq -1$; 3) $x < -1,6$, $x \geq -1$; 4) $(-\infty; 0,75] \cup [1; +\infty)$; 5) $2 - \sqrt{2} < x < 1,5$, $1,5 < x < 2 + \sqrt{2}$; 6) $\left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, где $n \in \mathbb{Z}$.

431. 1) $(-\infty; +\infty)$; 2) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 3) $y > -16$; 4) $y < 4$; 5) $-\frac{9}{8} < y < 2$; 6) $[-21; 3]$; 7) $0 < y < 2$; 8) $[1; 4]$; 9) $[2; +\infty)$.

432. 1) $(-\infty; -1)$, $(-1; +\infty)$; 2) $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi(n+1)\right)$, где $n \in \mathbb{Z}$; 3) $[2\pi n; \pi(2n+1)]$, где $n \in \mathbb{Z}$; 4) $[n - 0,5; n + 0,5]$, где $n \in \mathbb{Z}$.

433. 1) $(-3; -0,5) \cup (5; +\infty)$; 2) $x < -3$, $-0,5 < x < 0,5$; 3) $3 < x < 4$; 4) $(-1; 1) \cup (1; +\infty)$; 5) $\left(-\frac{5\pi}{2} - 2\pi n; -\frac{3\pi}{2} - 2\pi n\right)$, $\left(-\frac{\pi}{2}; -1\right)$, $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$, где $n = 0, 1, 2, \dots$; 6) $(0; 0,5)$, $(2\pi n - \pi; 2\pi n)$, $(-2\pi n; \pi - 2\pi n)$, где $n \in \mathbb{N}$.

434. 1) $x < -\frac{3}{4}$; 2) $-1 < x < 1$; 3) $1 < x < 2$; 4) $5 < x < \frac{5 + \sqrt{61}}{2}$.

435. 1) Функция возрастает на промежутках $[a; b]$ и $[c; d]$, а убывает на промежутках $[b; c]$ и $[d; +\infty)$; 2) функция возрастает на промежутке $[-2; 1,5]$, а убывает на промежутках $[-3; -2]$ и $[1,5; 5,5]$; 3) функция возрастает на промежутке $[1,5; 3,5]$, а убывает на промежутках $[-2,5; 1,5]$ и $[3,5; 5]$.

437. Убывающие: 2), 5); возрастающие: 1), 3).

438. 1) Возрастает на $(-\infty; -1]$, убывает на $[-1; +\infty)$; наибольшее значение 4; 2) возрастает на $(-\infty; 2]$, убывает на $[2; +\infty)$; наибольшее значение 25; 3) возрастает на $(-4; -1,5]$, убывает на $[-1,5; 1]$; наибольшее значение $-1,2$; 4) возрастает на $[-3; +\infty)$, убывает на $(-\infty; -3]$, наименьшее значение $\log_7 2$; 5) возрастает на $[2\pi k; \pi(2k+1)]$, убывает на $[\pi(2k+1); 2\pi(k+1)]$, где $k \in \mathbb{Z}$;

наибольшее значение 9, наименьшее значение 1; 6) возрастает на $\left[\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right]$, убывает на $\left[-\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k\right]$, где $k \in \mathbb{Z}$; наибольшее значение $\frac{10}{3}$; наименьшее значение 0,3.

439. 1) а) $D(g) = [-3; 4]$, $D(h) = (-3; -2) \cup (-2; -0,8) \cup (-0,8; 3,3) \cup (3,3; 4)$; б) $E(g) = [0; \sqrt{4,5}]$, $E(h) = (-\infty; 0) \cup \left[\frac{1}{\lg 4,5}; +\infty\right)$; в) $g(x)$ возрастает на $[-2; 1,5]$, убывает на $[-3; -2]$, $[1,5; 4]$, $h(x)$ возрастает на $(-3; -2)$, $[1,5; 3,3)$, $(3,3; 4)$, убывает на $(-2; -0,8)$, $(-0,8; 1,5]$; г) $\min g(x) = 0$, $\max g(x) = \sqrt{4,5}$, у $h(x)$ нет ни наибольшего, ни наименьшего значения; 2) а) $D(g) = [-2,5; 0,8] \cup [2,3; 4]$, $D(h) = [-2,5; 0,3) \cup (0,3; 0,8) \cup (2,3; 2,8) \cup (2,8; 3,7) \cup (3,7; 4)$; б) $E(g) = [0; \sqrt{4,5}]$, $E(h) = (-\infty; 0) \cup \left[\frac{1}{\lg 4,5}; +\infty\right)$; в) $g(x)$ возрастает на $[2,3; 3,5]$, убывает на $[-2,5; 0,8]$, $[3,5; 4]$, $h(x)$ возрастает на $[-2,5; 0,3)$, $(0,3; 0,8)$, $[3,5; 3,7)$, $(3,7; 4)$, убывает на $(2,3; 2,8)$, $(2,8; 3,5]$; г) $\min g(x) = 0$, $\max g(x) = \sqrt{4,5}$, у $h(x)$ нет ни наибольшего, ни наименьшего значения.

440. 1) 1; 2) 0; 3) 2; 4) 11; 5) 1; 6) -3; 7) 1; 8) 2; 9) 0.

441. 1) а) $\frac{\pi}{6}$; б) $-\frac{\pi}{4}$; в) $\frac{2\pi}{7}$; г) $3\pi - 10$; д) $\frac{\pi}{2} - 2$; 2) а) $\frac{2\pi}{3}$; б) $\frac{5\pi}{6}$; в) $\frac{3\pi}{4}$; г) $4\pi - 10$; д) $\frac{\pi}{2} - 1$; 3) а) $\frac{\pi}{3}$; б) $-\frac{\pi}{4}$; в) $-\frac{\pi}{5}$; г) $7 - 2\pi$; д) $\frac{\pi}{2} - 1$; 4) а) $\frac{2\pi}{3}$; б) $\frac{\pi}{4}$; в) $\frac{3\pi}{5}$; г) $7 - 2\pi$; д) $\frac{3\pi}{2} - 2$.

442. 1) $\frac{3 - \sqrt{17}}{4} < x < \frac{1}{2}$, $1 < x < \frac{3 + \sqrt{17}}{4}$; 2) $\cos \frac{1}{3} < x \leq 1$.

443. Например, $y = \frac{1}{x}$. Не может.

444. Нечетные: 1), 2); четные: 3), 4). Нечетная: б), д); четная: а), в), г).

447. При преобразовании (3) расстояния до оси абсцисс умножаются на k ; при преобразовании (4) расстояния до оси ординат делятся на k .

450. Первый и третий ученики выполнили преобразование графика верно.

454. $y = 1 - \{-x\}$; $\{x\} \rightarrow \{-x\} \rightarrow -\{-x\} \rightarrow -\{-x\} + 1$.

455. 1) $\frac{2\pi}{3}$; 2) 10π ; 3) $\frac{\pi}{4}$; 4) 2.

456. 1) Симметрия относительно оси ординат; 2) симметрия относительно оси абсцисс; 3) перенос параллельно оси абсцисс на 3 единицы влево; 4) перенос параллельно оси ординат на 3 единицы вверх; 5) сжатие к оси ординат в 2 раза; 6) растяжение от оси абсцисс в 2 раза.

459. 1) $a = 0, a > 5$; 2) $0 < a < 4, a = 5$; 3) $a = 4$; 4) $4 < a < 5$. Уравнение не имеет корней при $a < 0$.

460. 1) ОДЗ расширилось: в него добавилось число -1 ; 2) ОДЗ сузилось: из него исчезло число -1 ; 3) следует дополнительно рассмотреть случай, когда $x + 1 < 0$; 4) следует проверить, что $x + 1 > 0$; 5) равносильное преобразование; 6) следует дополнительно рассмотреть случай, когда $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$);

7) следует проверить, что $\cos x \geq 0$; 8) равносильное преобразование; 9) следует дополнительно рассмотреть случаи, когда $f(x) < 0, g(x) < 0$; 10) ОДЗ могло расшириться, следует проверить, что $g(x)$ имеет смысл; 11) ОДЗ могло расшириться, следует проверить, что $f(x) > 0$; 12) равносильное преобразование; 13) ОДЗ могло сузиться, следует дополнительно рассмотреть случай, когда $f(x)$ и $g(x)$ одновременно отрицательны.

461. 1) Следует проверить, что значения правой части уравнения неотрицательны; 2) равносильное преобразование; 3) ОДЗ расширилось: следует проверить, что $2x + 3$ и $x - 2$ неотрицательны; 4) ОДЗ расширилось: следует проверить, что $7 - x > 0, 7 - x \neq 1, x^3 + 9 > 0$; 5) следует дополнительно рассмотреть случаи, когда $\sin x = 0$ и $\cos x = -\sin x$; кроме того, следует учесть, что косинус должен быть неотрицателен; 6) равносильное преобразование; 7) равносильное преобразование; 8) ОДЗ сузилось: следует дополнительно рассмотреть случай $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$). Ответы: 1) $3 + \sqrt{7}$; 2) 3; 4) -1 ; 5) πn ,

$\pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$); 6) $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$); 7) $\pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, 2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$);

8) $-\arctg 0,5 + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$).

462. 2), 3) Следует учесть, что подкоренное выражение должно быть положительным; 4) подкоренное выражение должно быть неотрицательным; 5) ОДЗ расширилось; следует рассмотреть случай равенства нулю логарифма и учесть требование положительности выражения, стоящего под знаком ло-

гарифма; 6) ОДЗ расширилось; следует учесть требование неотрицательности подкоренных выражений; 7) равносильное преобразование; 8) ОДЗ расширилось; следует учесть требование существования $\log_{\sin x} \cos x$. Ответы: 1) $x < -3, x > 3$; 2) $x > \frac{3}{2}$; 3) $-\frac{1}{3} < x < 2,5$; 4) $x \geq 4,5, x = -1$; 5) $x = 6$; 6) $x \leq 1$; 7) нет решений; 8) $\frac{\pi}{4} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$.

464. Каждый переход в решении равносильен, поэтому проверку корней делать не нужно.

Советы

ГЛАВА



Функции и графики

7. Подумайте, сколькими способами можно выбрать первую цифру двузначного числа.

13. Обозначьте вторую сторону прямоугольника буквой y , выразите больший катет треугольника с меньшим катетом x и составьте пропорцию из подобия треугольников.

14. В этой задаче аргументом функции y оказываются различные выражения, значения которых должны попадать в заданную в условии область определения функции $y = f(x)$, т. е. выражение в скобках может принимать значения только из области определения функции $y = f(x)$. Исходя из этого и определяется соответствующее множество значений x . Работая с модулями, сначала рассмотрите отрицательные, а затем неотрицательные значения x .

16. Подумайте, какие целые (натуральные) значения x следует брать, чтобы значения y тоже оказались целыми (натуральными).

21. 3) Представьте себе, как расположена прямая по отношению к оси абсцисс.

22. Подумайте, каково взаимное расположение графиков данной функции и функции: 1) $y = x$; 2) $y = -x$.

24. Произведение обратно пропорциональных переменных постоянно ($xy = k$).

27. Не нужно вычислять k , достаточно сравнить произведения координат точек.

28. 2) Должны быть равны произведения координат.

32. Предположите, что такие точки имеют абсциссы $x_1 = a$ и $x_2 = b$.

35. 1), 2) Можно применить формулу расстояния или построить график. В 3) представьте себе, как выглядит искомый график и запишите ответ.

36. Расстояние от точки $M(x; y)$ до прямой $y = -1$ равно $|y + 1|$.

39. 4) Перед тем, как применять формулу корней квадратного уравнения, попробуйте найти сумму его коэффициентов.

43. Найдите значения левой части уравнения на концах данного отрезка и воспользуйтесь свойством непрерывной функции.

44. 2), 4), 6). При решении нестрогого неравенства нули соответствующей функции включаются в множество решений. При изображении этих нулей на координатной оси их удобно изображать не «пустым», а черным кружком.

54. Подумайте, какую функцию задает выражение, стоящее в левой части уравнения, и попробуйте подобрать корень.

55. Обратите внимание на характер монотонности функций, которые задаются левой и правой частями уравнения.

56. Подумайте, какую функцию задает выражение, стоящее в левой части уравнения, и какие знаки оно имеет на концах данного промежутка.

58. Попробуйте решить задачу графически — постройте на листе бумаги в клетку график функции $y = [x]$ ($y = \{x\}$) (за координатную единицу возьмите 4 клетки). Проведите прямые, проходящие через точку $(0; -1)$, пересекающие график только в двух точках. Затем определите их угловые коэффициенты.

59. Абсцисса вершины параболы $y = ax^2 + bx + c$ равна $-\frac{b}{2a}$, а ординату можно найти подстановкой абсциссы в уравнение.

63. Ответы на эти вопросы связаны с наличием или отсутствием корней соответствующего квадратного уравнения. Здесь лучше находить сокращенный дискриминант: $\frac{D}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$.

64. Подумайте, при каком значении x левая часть уравнения равна $a - b + c$.

65. 1) Сделайте эскиз соответствующей параболы и определите, какой должна быть ордината ее точки с абсциссой a . 2) Рассмотрите два случая: 1) уравнение имеет единственный корень; 2) корни имеют разные знаки.

66. Постарайтесь дать ответ устно.

67. Справа и слева от вершины параболы квадратичная функция монотонна. Выясните, принадлежит ли абсцисса вершины указанному промежутку и как ведет себя данная функция на этом промежутке.

68. Область определения можно найти по рисунку, ответив на вопрос, какой может быть сторона прямоугольника. Площадь прямоугольника должна изменяться от нуля до своего наибольшего значения, причем нулем она быть не может.

72. 1) и 2) Искомую симметрию можно получить в результате последовательного выполнения симметрии относительно одной координатной оси и переноса параллельно другой. 3) У нас есть преобразование $f(x) \rightarrow f(|x|)$, которое уничтожает часть графика, расположенную в левой полуплоскости и дублирует оставшуюся часть симметрично относительно оси ординат. Чтобы уничтожить часть графика, расположенную в правой полуплоскости, ее сначала надо переместить влево: $f(x) \rightarrow f(-x)$. 4) У нас есть преобразование $y = f(x) \rightarrow |y| = f(x)$, которое уничтожает часть графика, расположенную в нижней полуплоскости, и дублирует оставшуюся часть симметрично относительно оси абсцисс. Чтобы уничтожить часть графика, расположенную в верхней полуплоскости, ее сначала надо переместить в нижнюю: $f(x) \rightarrow -f(x)$. 5) Симметрию относительно точки можно получить как результат двух осевых симметрий. 6) Используйте результаты, полученные в 3) и 4).

Г Л А В А



Степени и корни

78. Утвердительный ответ на вопрос: «Может ли...?» — достаточно подтвердить конкретным примером, а отрицательный ответ необходимо обосновать.

88. Проще всего задать эту функцию кусочно. Чтобы задать ее одной формулой, в 1) воспользуйтесь симметрией графика относительно оси ординат. В 2) нужно сделать симметрию части графика, полученного в 1) относительно оси абсцисс. Изменить знак у функции при $x < 0$ поможет выражение $\frac{|x|}{x}$. Кстати, в математике есть специальная функция *сигнум* (лат.

signum — знак): $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x > 0, \\ 0, & \text{при } x = 0, \\ -1, & \text{при } x < 0, \end{cases}$ правда, в область определения нашей функции 0 не входит.

89. Выражение в левой части задает четную функцию. Подумайте, в каком случае множество ее нулей нечетно.

90. При подстановке целого числа в многочлен вместо x , многочлен можно представить в виде суммы членов, каждый из которых делится на это число, и свободного члена. Если в многочлен подставляется целое число, являющееся корнем, то сумма членов обращается в нуль и, следовательно, делится на корень. В этом случае на него должен делиться и свободный член. Следовательно, если многочлен имеет целый корень, то он является делителем свободного члена. Для подбора корня многочлена удобно использовать схему Горнера. Покажем ее применение на подборе корня многочлена $3x^3 - 9x^2 - 2x + 6$. Для вычисления значений многочлена его удобно представить в виде $((3x - 9)x - 2)x + 6$. Сами вычисления проводятся с помощью таблицы, в верхней строке которой записываются по порядку коэффициенты многочлена (включая нули). Старший коэффициент сносится во вторую строку, и слева от него записывается значение x , которое проверяется. Мы будем проверять делители числа 6. Это числа 1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6. Числа 1 и -1 легко проверить устно, поэтому начнем проверку с числа 2:

	3	-9	-2	+6
2	3			

В пустую клетку второй строки таблицы записывается произведение числа из левой клетки на проверяемое значение, сложенное с числом, стоящим в верхней клетке:

	3	-9	-2	+6
2	3	-3	-8	-10

В последней клетке оказывается записанным значение многочлена. В нашем случае оно равно -10, а значит, число 2 не является корнем. Строчка вычеркивается, добавляется новая строка и процедура повторяется для числа -2, а затем для числа 3:

	3	-9	-2	+6
2	3	-3	-8	-10
-2	3	-15	28	-50
3	3	0	-2	0

При $x = 3$ значение многочлена оказалось равным нулю, значит, 3 — корень многочлена и многочлен можно разложить на множители $(x - 3)(3x^2 + 0 \cdot x - 2)$. Коэффициенты второго множителя берутся из соответствующей строки таблицы (кроме первой и последней клеточек). Можно продолжить разложение на множители, раскладывая квадратный трехчлен: $3x^2 - 2 = 3\left(x - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)\left(x + \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$. Таким образом, $3x^3 - 9x^2 - 2x + 6 = 3(x - 3)\left(x - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)\left(x + \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

100. Для обратимости функции необходимо и достаточно, чтобы каждому ее значению соответствовало одно единственное значение аргумента. В противном случае, ее график не будет задавать функцию x . Графически это выражается в том, что любая прямая, перпендикулярная оси ординат, либо не пересекает график функции y , либо имеет с ним единственную общую точку. После того как вы убедитесь в обратимости функции $y = f(x)$, график функции $y = g(x)$ легко построить с помощью симметрии относительно прямой $y = x$.

106. Равенство с неотрицательными частями не нарушится, если его возвести в квадрат. Поэтому, возводя в квадрат уравнение, следует затем проверить его корни, — ведь они были найдены в предположении, что обе части уравнения положительны. Если при подстановке корня это окажется не так, его следует отбросить как посторонний. В заданиях 1)–4) неотрицательность левой части гарантируется равенством, которое получается после возведения в квадрат, поэтому найденный корень можно подставить только в правую часть исходного уравнения.

107. Корень, конечно, на знак не влияет, но подкоренное выражение должно быть неотрицательным, а в задании 1) оно еще не может обращаться в нуль.

108. В заданиях 1)–3), 7) и 8) следует рассматривать два случая: а) когда выражение без корня меньше нуля, достаточно, чтобы выражение под корнем не было отрицательным; б) когда выражение без корня больше или равно нулю, обе части неравенства можно возвести в квадрат. В заданиях 4)–6) не забудьте о том, что выражение под корнем должно быть неотрицательным.

111. 6) a здесь может принимать только неположительные значения, поэтому $\sqrt[4]{a^4} = |a| = -a$. 8) И здесь a принимает только неположительные значения. Поэтому $\sqrt[6]{-a^{18}} = -a\sqrt[6]{-a}$.

112. 3) Следует «подстраховаться» на случай отрицательных значений a : $\sqrt[12]{a^4} = \sqrt[3]{|a|}$. 7), 8) Подумайте, какое число, положительное или отрицательное, возводится в квадрат под знаком корня.

116. Введением вспомогательной переменной приведите к квадратному уравнению.

117. Возведите обе части равенства в квадрат. «Подгоните» данное выражение под правую часть формулы.

118. Произведение суммы на разность равно, как известно, разности квадратов.

119. Иррациональные уравнения с квадратными корнями решаются возведением в квадрат, а с кубическими — в куб. Полезно помнить, что $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$.

120. Чтобы найти неизвестные по их сумме и произведению, удобно составить квадратное уравнение, корнями которого являются неизвестные.

121. Введите вспомогательную переменную.

122. Приведите корни к общему показателю.

123. Выражение под корнем с большим показателем постарайтесь представить в виде квадрата.

129. Представьте данное равенство в виде равенства степеней числа 2 и перейдите к равенству показателей.

138. 1), 2) Попробуйте сократить дробь на a в некоторой степени. 5), 6) Попробуйте упростить каждую дробь отдельно.

141. С помощью вспомогательных переменных сведите уравнения к квадратным, которые не должны иметь положительных корней.

Г Л А В А



Показательная и логарифмическая функции

148. a^{-6} и a^6 можно найти, зная a^2 .

152. Найдите квадрат искомого выражения.

155. Приведите обе части уравнения к одному основанию и приравняйте показатели.

156. 1) — 6) Старайтесь выносить такой множитель, чтобы в скобках остались целые числа; 7), 8) Разнесите по разным частям равенства степени с одинаковыми основаниями.

157. Сведите к квадратным уравнениям, вводя вспомогательную переменную.

158. 1), 2) Запишите первое уравнение системы в виде равенства степеней с одинаковыми основаниями; 3) в первом уравнении системы примените формулу сокращенного умножения; 4) в первом уравнении системы разнесите переменные по разным частям равенства и подумайте о свойствах функции, значения которой равны, соответственно, левой и правой частям равенства.

159. 1) — 4) Запишите правую часть равенства в виде степени и воспользуйтесь монотонностью показательной функции; 5), 6) примените метод интервалов; 7), 8) воспользуйтесь тем, что левая и правая части равенств задают функции с разным характером монотонности; 9), 10) степени с одинаковыми показателями можно делить друг на друга.

160. Сведите задачу к решению квадратного неравенства.

161. Речь идет о числе положительных корней уравнения $y^2 - ay + a - 1 = 0$, которое при всех значениях a имеет корень, равный 1.

166. 1) — 4) Используйте определение логарифма. 5), 6) Решите квадратное уравнение относительно логарифма.

168. Запишите обе части неравенства в виде степеней с одним и тем же основанием.

171. Подумайте, как изменится значение логарифма, если его основание изменить на 1.

172. В 3) — 8) не забывайте, что основание логарифма не может быть равно 1.

173. 5) Разделите почленно на 9^x .

174. Обратите внимание на характер монотонности функций, задаваемых выражениями, стоящими в разных частях равенств.

175. Перейдите к показательной форме равенства и повторите решение № 161.

176. Представьте обе части неравенства в виде логарифмов с одинаковыми основаниями и воспользуйтесь свойством монотонности логарифмической функции.

177. Проверьте, что координаты найденной по рисунку точки пересечения графиков удовлетворяют уравнениям, за-

дающим функции. При записи ответов к неравенствам не забудьте об областях определения функций — найденные решения должны принадлежать их пересечению (одновременно обеим областям).

178. Не забудьте, что выражение под знаком логарифма может принимать только положительные значения. Можно сразу выделить соответствующую часть координатной прямой, а затем уже рассматривать интервалы.

179. Рассмотрите два случая: когда основание логарифма меньше 1 и когда больше. Не забудьте об ОДЗ!

180. Не забудьте, что выражение под знаком логарифма должно быть положительно.

182. 6) $\frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \sqrt{2}-1$; 8), 9) перейдите к логарифмам с каким-нибудь одним основанием.

186. 1) Представьте обе части в виде степеней с основанием 3 и найдите сумму арифметической прогрессии; 2) перейдите к логарифмам с основанием 10.

187. Сравните отдельно с 2 и 3.

188. Достаточно рассмотреть случай, когда логарифмы положительны. Примените свойство суммы обратно пропорциональных переменных.

189. Рассмотрите разность логарифмов.

190. Область допустимых значений переменной (ОДЗ) — это множество чисел, для каждого из которых каждое из выражений имеет смысл. Выполняя преобразования, старайтесь получить логарифмы с одинаковыми основаниями.

191. Подумайте, по какому основанию логарифмировать уравнение. 11) x может принимать и значение 1.

192. Представьте левую часть уравнения в виде степени с основанием 20.

193. Найдите логарифмы $a^{\log_3 c}$ и $c^{\log_3 a}$ по основанию b .

195. 1)—3) Потенцируйте неравенство с учетом монотонности логарифмической функции; 4) приведите к квадратному неравенству относительно $\log_3 (3^x - 1)$; 5) приведите к квадратному неравенству относительно $\log_3 (4^x + 1)$; 6), 8)—10) рассмотрите случаи, когда основание логарифма меньше и когда больше 1.



Тригонометрические функции и их свойства

232. Используйте результаты № 229.

245. Представьте $\sin \varphi - \operatorname{tg} \varphi$ как $\frac{\sin \varphi (\cos \varphi - 1)}{\cos \varphi}$.

268. Следует учесть ограниченность множества значений арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса.

269. См. указание к № 268.

271. Отнеситесь к этим уравнениям как к квадратным.

295. 5), 6) Рассмотрите выражение в правой части равенства как квадратный трехчлен относительно $\sin x$ и подумайте, на каком промежутке его рассматривать.

298. Рассмотрите выражение в правой части равенства как квадратный трехчлен относительно $\sin x$ и подумайте, при каком значении синуса его значение наименьшее.

299. Рассмотрите выражение в правой части равенства как квадратный трехчлен и подумайте, какой должна быть абсцисса вершины соответствующей параболы.

335. Необходимо и достаточно, чтобы сумма квадратов чисел была равна 1.

341. 9), 10) Возведите обе части уравнения в квадрат. Зная произведение и сумму, можно составить вспомогательное квадратное уравнение с помощью теоремы Виета.

343. 1) Возведите в квадрат обе части данного равенства.

2) Возведите в квадрат равенство, полученное в первом задании.

345. 1) *1-й способ.* Рассмотрим единичную окружность с центром в начале координат. Для точки этой окружности, находящейся в I координатной четверти (угол поворота острый), доказываемое утверждение сводится к очевидному сравнению суммы катетов с гипотенузой, равной 1. 2-й способ. Сравнить с I квадрат суммы синуса и косинуса угла I четверти.

349. Представьте углы следующим образом: 1) $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$; 2) $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$; 3) $105^\circ = 60^\circ + 45^\circ$ и примените формулы синуса и косинуса суммы и разности.

355. 1) Представьте $\sin 48^\circ$ как $\sin (23^\circ + 25^\circ)$ и примените формулу синуса суммы.

362. Воспользуйтесь тем, что $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$.

391. В процессе преобразований обратите внимание на границы, в которых заключены аргументы тригонометрических функций, и каковы по знаку их значения.

394. Представьте аргумент синуса в виде суммы.

395. 4) Используйте формулу косинуса двойного угла.

396. Умножьте равенство на $8 \sin 20^\circ$.

419. 6) Представьте правую часть равенства следующим образом: $-\cos \frac{x}{2} = \cos \left(\pi - \frac{x}{2} \right)$.

423. 1) Упростите левую часть уравнения. 2) Сведите к квадратному уравнению. 3) Решите разложением на множители. 4) Однородное уравнение. 5) Используйте формулы: разности квадратов и разности и суммы косинусов. 6) Используйте вынесение общего множителя и формулу косинуса двойного угла. 7) Разделите уравнение на 2 и примените одну из двух формул: косинуса разности или синуса суммы двух аргументов. 8) Решайте или по формуле разности косинусов, или используя условие равенства косинусов. 9) Однородное уравнение. 10) Используйте способ группировки для разложения на множители. 11) Сведите к квадратному уравнению. 12) Однородное уравнение. 13) Сверните по формуле синуса суммы. 14) Сведите к однородному уравнению. 15) Примените формулы приведения. 16) Разделите на 2 и используйте одну из формул: косинуса суммы или синуса разности. 17) Примените формулы: разности квадратов и косинуса двойного угла. 18) Разложите на множители способом группировки.

428. Преобразуйте правую часть, вводя вспомогательный угол.

429. 2) Преобразуйте показатель степени числа 4 к виду $\frac{1}{2}(1 - \operatorname{tg} x)$. 4) Перейдите к синусам и косинусам. Когда будете переходить от простейшего тригонометрического уравнения к показательному, не забудьте, что показательная функция принимает только положительные значения.



Повторение

431. 5), 6) Рассмотрите квадратный трехчлен от вспомогательной переменной и подумайте, какие значения она может принимать. 7), 8) Подумайте, на каком промежутке функция возрастает, а на каком убывает. 9) $3^x + 3^{-x}$ — сумма обратно пропорциональных переменных, которая минимальна при равенстве их значений.

438. 5), 6) Рассматривайте интервалы на тригонометрическом круге.

440. 7)—9) Сравните наибольшее значение одной части равенства с наименьшим значением другой.

441. Не забывайте об области значений y ; д) с помощью формул приведения перейдите к нужной функции.

442. 1) Представьте все части неравенства как арксинусы и воспользуйтесь свойством монотонности арксинуса; 2) решите неравенство как квадратное относительно арккосинуса и, с учетом области значений арккосинуса, используйте свойство его монотонности.

443. Рассмотрите две точки, симметричные относительно прямой $y = x$. Сравните их абсциссы и ординаты.

459. Постройте график функции $y = |4 + 2|x| - x^2|$ и определите, сколько общих точек он имеет с прямой $y = a$ в зависимости от значения a .

Решения

ГЛАВА



Функции и графики

12. Высота коробки равна x , а в основании ее квадрат со стороной $10 - 2x$. По формуле объема прямоугольного параллелепипеда имеем $V = x(10 - 2x)^2 = x(2(5 - x))^2 = 4x(5 - x)^2$.

13. $\frac{x}{3} = \frac{4-y}{4}$, $y = 4 - \frac{4}{3}x$, $P = 2(x + y) = 8 - \frac{2}{3}x$. Понятно, что x — число положительное и заведомо меньше, чем катет, равный 3.

14. 3) д) При всех $x < 0$ значение выражения $x + |x|$ равно 0 и, следовательно, попадает в указанную область определения. При $x > 0$ имеем $x + |x| = 2x$, значения которого попадают в указанный промежуток при $0 < x \leq 1$. ж) При всех $x < 0$ значение выражения $\frac{x - |x|}{x}$ равно 2 и, следовательно, попадает в указанную область определения. При $x > 0$ имеем $\frac{x - |x|}{x} = 0$, значит, и при таких x мы не выходим за пределы промежутка $[-1; 2]$. А при $x = 0$ выражение $\frac{x - |x|}{x}$ не имеет смысла и только это значение x и следует исключить.

32. Пусть прямая пересекает соответствующую ветвь гиперболы в точках с абсциссами a и b . Тогда должно выполняться равенство: $\frac{1}{a} + a = \frac{1}{b} + b$. Отсюда $a - b = \frac{a - b}{ab}$ и $ab = 1$, поскольку $a \neq b$. Следовательно, прямая должна пересекать гиперболу в точках $(a; \frac{1}{a})$ и $(\frac{1}{a}; a)$, симметричных относительно прямой $y = x$. Значит, и сама секущая симметрична этой прямой и имеет угловой коэффициент $k = -1$.

48. Доказательство. Для любых x_1 и x_2 , входящих в промежуток L , из условия $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) < f(x_2)$ и $g(x_1) < g(x_2)$. Складывая два верных неравенства одного знака, получаем верное неравенство: $f(x_1) + g(x_1) < f(x_2) + g(x_2)$, а значит, функция $y = f(x) + g(x)$ на промежутке L возрастает, что и требовалось доказать.

52. В № 50 вы доказали, что функция $y = -f(x)$ убывает на $[a; b]$. Сумма двух убывающих на $[a; b]$ функций убывает (доказательство аналогично № 48), значит, $y = g(x) + (-f(x))$ убывает на $[a; b]$. На концах отрезка эта функция принимает значения разных знаков, значит, в силу непрерывности она имеет на этом промежутке нуль. Этот нуль, вследствие монотонности функции, является единственным, т. е. уравнение $f(x) = g(x)$ имеет на $(a; b)$ единственный корень, что и требовалось доказать.

53. Возможность отсутствия корней можно проиллюстрировать примером. А для доказательства единственности заметим, что из условия $x_1 > x_0$, где $f(x_0) = g(x_0)$ следует, что $f(x_1) > f(x_0) = g(x_0) > g(x_1)$, а из условия $x_1 < x_0$ следует, что $f(x_1) < f(x_0) = g(x_0) < g(x_1)$. Значит, при $x_1 \neq x_0$ $f(x_1) \neq g(x_1)$, т. е. x_0 — единственный корень, что и требовалось доказать.

65. 1) Точка $x = a$ оси абсцисс расположена над параболой, значит, значение квадратного трехчлена $x^2 - 2x + a$ в ней отрицательно: $a^2 - 2a + a < 0$, $a^2 - a < 0$, $a(a - 1) < 0$, $0 < a < 1$. 2) Уравнение будет иметь единственный положительный корень, в трех случаях: а) $D = 0$ и $x_0 > 0$; б) корни имеют разные знаки, т. е. $a - 1 < 0$; в) один из корней равен нулю, а второй положителен, т. е. $a - 1 = 0$ и $a > 0$. Имеем: а) $D = a^2 - 4a + 4 = 0$, $(a - 2)^2 = 0$, $a = 2$. При этом $x_0 = 1 > 0$, что удовлетворяет требованию случая; б) $a - 1 < 0$, $a < 1$; в) $a - 1 = 0$, $a = 1$. При этом $x_2 = 1 > 0$ — удовлетворяет требованию случая. Окончательно получаем: $a < 1$, $a = 2$.

67. 3) Большему положительному значению подкоренного выражения соответствует меньшее значение функции y . Свое наибольшее значение подкоренное выражение принимает при $x = \frac{-1}{2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)} = 2$. Это значение принадлежит промежутку $[-1; 3]$

и равно 4. Значит, наименьшее значение $y(2) = \frac{6}{\sqrt{4}} = 3$. Чем дальше x от числа 2, тем меньше значение подкоренного выражения. На указанном промежутке самая удаленная от 2 точка — это левый конец промежутка. Значение подкоренного выражения при $x = -1$, наименьшее на указанном промежутке, равно $\frac{7}{4}$. Значит, наибольшее значение $y(-1) = \frac{6}{\sqrt{7/4}} = \frac{12}{\sqrt{7}}$.

68. Функция $S(x)$ определена при всех x , при которых существует прямоугольник, т. е. при $0 < x < 3$. Обозначим длину другой стороны прямоугольника буквой a , тогда $S = ax$. Из подобия треугольников имеем: $\frac{a}{3-x} = \frac{4}{3}$, $a = \frac{4(3-x)}{3} = 4 - \frac{4}{3}x$, следовательно, $S(x) = 4x - \frac{4}{3}x^2$. Наибольшее значение квадратный трехчлен $4x - \frac{4}{3}x^2$ принимает при $x = \frac{-4}{2(-\frac{4}{3})} = \frac{3}{2}$, принадлежащем $D(S)$, значит, наибольшее значение функции $S(x)$ равно $S(\frac{3}{2}) = 3$. Получаем $0 < S(x) \leq 3$. Ответ: $D(S) = (0; 3)$, $E(S) = (0; 3]$.

Г Л А В А



Степени и корни

75. 4) Не существует, так как степень $(-2)^n$ оканчивается на 4 только при четном n ($n = 2, 6, 10, \dots$), а такие степени положительны. 5) Не существует, $(-3)^n$ оканчивается на 1 только при n кратном четырем, а такие степени положительны.

78. 2) При нечетном n функция является возрастающей. Если ее график пересекает ось ординат в верхней полуплоскости, то в IV четверти у него не будет точек, а если в нижней, то точек не будет во II четверти.

90. 1) Будем подбирать корни многочлена $x^3 + 3x^2 - 10x - 24$, используя схему Горнера. Устно проверив, что ни 1, ни -1 не являются корнями, заполняем таблицу:

	1	3	-10	-24
x	x	x	x	$\neq 0$
-2	1	1	-12	0

$x_1 = -2$ — корень многочлена. Теперь осталось найти корни квадратного трехчлена $x^2 + x - 12$, коэффициенты которого записаны в последней строке таблицы. Корни равны: $x_2 = -4$, $x_3 = 3$. По теореме Безу $x^3 + 3x^2 - 10x - 24 = (x + 4)(x + 2) \times (x - 3)$. 2) Можно обойтись и без подбора корней, используя группировку: $2x^3 - 7x^2 - 2x + 7 = x^2(2x - 7) - (2x - 7) = (2x - 7)(x^2 - 1) = (2x - 7)(x - 1)(x + 1)$. 5) $P(x) = 2x^4 + 5x^3 - 10x^2 + 5x - 12$. Устно проверив, что ни 1, ни -1 не являются корнями, заполняем таблицу:

	2	5	-10	5	-12
2	2	9	8	21	$\neq 0$
-2	2	1	-12	29	$\neq 0$
3	2	11	23		$\neq 0$
-3	2	-1	-7	26	$\neq 0$
4	2	13	42		$\neq 0$
-4	2	-3	2	-3	0

-4 — корень многочлена, значит, $2x^4 + 5x^3 - 10x^2 + 5x - 12 = (x + 4)(2x^3 - 3x^2 + 2x - 3)$. Мы уже проверяли числа ± 1 и ± 3 , значит, целых корней у второго множителя нет. Однако его можно разложить на множители с помощью группировки: $(2x^3 - 3x^2) + 2x - 3 = x^2(2x - 3) + (2x - 3) = (2x - 3)(x^2 + 1)$. Окончательно получаем, что $2x^4 + 5x^3 - 10x^2 + 5x - 12 = (x + 4)(2x - 3)(x^2 + 1)$.

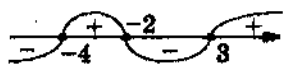


Рис. 123

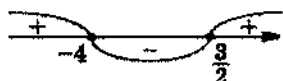


Рис. 124

91. 1) Многочлен имеет корни $x_1 = -4$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$. Неравенство решаем методом интервалов (рис. 123). Ответ: $x < -4$, $-2 < x < 3$. 5) Поскольку $x^2 + 1$ ни при каких значениях x не обращается в нуль, многочлен имеет корни $x_1 = -4$ и $x_2 = \frac{3}{2}$. Решаем неравенство $(x + 4)(2x - 3)(x^2 + 1) < 0$ (рис. 124). Ответ: $-4 < x < \frac{3}{2}$.

106. 3) Возведем обе части уравнения в квадрат. $9x^2 + 16x = -4x^2 + 9 + 12x$, $5x^2 + 4x - 9 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{9}{5}$. Проверка: при $x = 1$: $2x + 3 = 2 + 3 \geq 0$, следовательно, 1 — корень; при $x = -\frac{9}{5}$: $2x + 3 = -\frac{18}{5} + 3 < 0$, следовательно, $-\frac{9}{5}$ не является корнем. Ответ: 1. 7) Введем новую переменную $y = x + 1$, тогда $\sqrt{3y + 4} - \sqrt{y} = 2$. Уединим корень: $\sqrt{3y + 4} = \sqrt{y} + 2$, $3y + 4 = y + 4 + 4\sqrt{y}$, $2\sqrt{y}(\sqrt{y} - 2) = 0$, $y = 0$ или $y = 4$. Проверка: при $y = 0$: $\sqrt{y} + 2 = \sqrt{0} + 2 \geq 0$, следовательно, 0 — корень; $y = 4$: $\sqrt{3y + 4} - \sqrt{y} = \sqrt{16} - \sqrt{4} = 2$, следовательно, $y = 4$ — корень. Вернемся к переменной x : $x + 1 = 0$, $x = -1$; $x + 1 = 4$, $x = 3$. Ответ: -1; 3. 8) Введем новую переменную $y = 3 - x$, тогда $\sqrt{12 + y} + \sqrt{y} = 6$. Уединим корень: $\sqrt{12 + y} = 6 - \sqrt{y}$, $12 + y = 36 + y - 12\sqrt{y}$, $\sqrt{y} = 2$, $y = 4$. Проверка: при $y = 4$: $6 - \sqrt{y} = 6 - \sqrt{4} \geq 0$, следовательно, 4 — корень. Вернемся к переменной x : $3 - x = 4$, $x = -1$. Ответ: -1.

108. 2) Если $x < 0$, должно быть $2x + 15 \geq 0$, т. е. $\begin{cases} x < 0, \\ 2x + 15 \geq 0, \end{cases}$ Если $x \geq 0$, должно быть $\begin{cases} x \geq 0, \\ x \geq -7,5. \end{cases}$
 $2x + 15 \geq x^2$, т. е. $\begin{cases} x \geq 0, \\ 2x + 15 \geq x^2, \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 - 2x - 15 \leq 0, \end{cases}$
 $\begin{cases} x \geq 0, \\ -3 \leq x \leq 5, \end{cases}$ $0 \leq x \leq 5$. Объединяя результаты обоих случаев,

получаем $-7,5 < x < 5$. 4) Должно быть $\begin{cases} x \geq 1, \\ 3x + 7 \geq 0, \\ x^2 - 2x + 1 \geq 3x + 7, \end{cases}$

$$\begin{cases} x \geq 1, \\ x \geq -\frac{7}{3}, \\ x^2 - 5x - 6 \geq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 1, \\ x \geq -\frac{7}{3}, \\ x < -1 \text{ или } x \geq 6, \end{cases} \quad x \geq 6. \quad 7) \text{ 1-й случай:}$$

$$\begin{cases} 3x - 1 < 0, \\ 5x^2 + x \geq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x < \frac{1}{3}, \\ x < -\frac{1}{5} \text{ или } x \geq 0, \end{cases} \quad x < -\frac{1}{5} \quad \text{или} \quad 0 \leq x < \frac{1}{3}.$$

$$\text{2-й случай: } \begin{cases} 3x - 1 \geq 0, \\ 5x^2 + x \geq 9x^2 + 1 - 6x. \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq \frac{1}{3}, \\ 4x^2 - 7x + 1 \leq 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{1}{3}, \\ \frac{7 - \sqrt{33}}{8} < x < \frac{7 + \sqrt{33}}{8}. \end{cases}$$

Прикидка показывает, что $\frac{7 - \sqrt{33}}{8} < \frac{1}{3} < \frac{7 + \sqrt{33}}{8}$, значит, решением системы является промежуток $\frac{1}{3} < x < \frac{7 + \sqrt{33}}{8}$. Объединяя результаты, получаем ответ: $x < -\frac{1}{5}$, $0 \leq x < \frac{7 + \sqrt{33}}{8}$.

116. 2) Введем вспомогательную переменную $y = \sqrt[6]{3x^4 + 16}$, где $y \geq \sqrt[6]{16}$, тогда $y^2 - y - 2 = 0$, $y_1 = 2$, $y_2 = -1$ — не удовлетворяет условию введения переменной y . Вернемся к переменной x : $\sqrt[6]{3x^4 + 16} = 2$, $3x^4 + 16 = 64$, $3x^4 = 48$, $x^4 = 16$, $x_1 = -2$, $x_2 = 2$.

6) Введем вспомогательную переменную $y = \sqrt[3]{x} + 2$, тогда $\frac{4}{y} + \frac{y+1}{5} = 2$, $y^2 - 9y + 20 = 0$, $y_1 = 4$, $y_2 = 5$. Вернемся к переменной x : $\sqrt[3]{x} + 2 = 4$, $x = 8$; $\sqrt[3]{x} + 2 = 5$, $x = 27$. Ответ: 8; 27.

119. 2) Возведем равенство в куб: $x + 10 - x + 9 - 3\sqrt[3]{(x+10)(x-9)(\sqrt[3]{x+10} - \sqrt[3]{x-9})} = 1$; $19 - 3\sqrt[3]{x^2 + x - 90} = 1$; $\sqrt[3]{x^2 + x - 90} = 6$; $x^2 + x - 90 = 216$; $x^2 + x - 306 = 0$; $x_1 = -18$; $x_2 = 17$. Ответ: -18; 17.

$$120. 1) \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{4}{3}, \\ xy = 9, \end{cases} \begin{cases} \frac{\sqrt{y} + \sqrt{x}}{\sqrt{xy}} = \frac{4}{3}, \\ xy = 9. \end{cases} \text{ Поскольку из второ-}$$

го уравнения $\sqrt{xy} = 3$, имеем: $\begin{cases} \sqrt{y} + \sqrt{x} = 4, \\ \sqrt{xy} = 3. \end{cases}$ Составим вспомо-

гательное квадратное уравнение, корнями которого явля-

ются $\sqrt{x}$ и $\sqrt{y}$: $z^2 - 4z + 3 = 0$, $z_1 = 1$, $z_2 = 3$. $\begin{cases} \sqrt{x_1} = 1, \\ \sqrt{y_1} = 3, \end{cases} \begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 9; \end{cases}$

$\begin{cases} \sqrt{x_2} = 3, \\ \sqrt{y_2} = 1, \end{cases} \begin{cases} x_2 = 9, \\ y_2 = 1. \end{cases}$ Ответ: $x_1 = 1$, $y_1 = 9$; $x_2 = 9$, $y_2 = 1$.

3) Возведем первое уравнение в куб, учитывая при этом ин-

формацию из второго уравнения: $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 4$, $x + y +$

$+ 3\sqrt[3]{xy}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}) = 64$; $28 + 3\sqrt[3]{xy} \cdot 4 = 64$; $\sqrt[3]{xy} = 3$; $xy = 27$.

Произведение неизвестных 27, а их сумма 28. Составим

вспомогательное квадратное уравнение, корнями которого яв-

ляются неизвестные: $z^2 - 28z + 27 = 0$, $z_1 = 1$, $z_2 = 27$.

$\begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 27, \end{cases} \begin{cases} x_2 = 27, \\ y_2 = 1. \end{cases}$ Ответ: $x_1 = 1$, $y_1 = 27$; $x_2 = 27$, $y_2 = 1$.

4) Преобразуем первое уравнение системы, учитывая, что из

второго уравнения $\sqrt[6]{xy} = 2$ и $\sqrt[6]{x^2y^2} = 4$: $\sqrt[6]{x} \sqrt[6]{y} + \sqrt[6]{y} \sqrt[6]{x} = 12$,

$\sqrt[6]{x^2y^2} + \sqrt[6]{x^3y^2} = 12$, $\sqrt[6]{x^2y^2}(\sqrt[6]{x} + \sqrt[6]{y}) = 12$, $4(\sqrt[6]{x} + \sqrt[6]{y}) = 12$,

$\sqrt[6]{x} + \sqrt[6]{y} = 3$. Сумма корней равна 3, а их произведение равно 2.

Составим вспомогательное квадратное уравнение: $z^2 - 3z + 2 = 0$,

$z_1 = 1$, $z_2 = 2$.

$\begin{cases} \sqrt[6]{x_1} = 1, \\ \sqrt[6]{y_1} = 2, \end{cases} \begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 64, \end{cases} \begin{cases} \sqrt[6]{x_2} = 2, \\ \sqrt[6]{y_2} = 1, \end{cases} \begin{cases} x_2 = 64, \\ y_2 = 1. \end{cases}$ Ответ: $x_1 = 1$,

$y_1 = 64$; $x_2 = 64$, $y_2 = 1$.

121. 1) Введем вспомогательную переменную $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$ ($y \geq 0$), тогда задача сводится к определению всех a , при которых уравнение $y^2 + 4y + a = 0$ имеет единственный неотрицательный корень. Это может произойти в трех случаях: а) ког-

да единственный корень уравнения является неотрицательным; б) когда корни уравнения имеют разные знаки и в) когда один корень равен 0, а другой отрицателен. Рассмотрим эти случаи. а) $D = 0$, $4 - a = 0$, $a = 4$. Корень $x_0 = -2$ отрицателен, что не удовлетворяет условию случая. б) $D > 0$ и произведение

корней отрицательно: $\begin{cases} 4 - a > 0, \\ a < 0, \end{cases} \begin{cases} a < 4, \\ a < 0, \end{cases} a < 0$. в) Один из

корней равен 0, значит, $a = 0$. Тогда другой корень равен -4 , что удовлетворяет условию случая. Объединяя результаты, получаем о т в е т: $a \leq 0$. 2) Введем вспомогательную перемен-

ную $x = \sqrt{2z + 4} + 1$, где $x \geq 1$, так как $z \geq 0$. Тогда задача сводится к определению всех a , при которых уравнение $x^2 - 3x + a = 0$ имеет единственный корень, больший или равный единице. Это может произойти в трех случаях: а) когда единственный корень уравнения больше или равен 1; б) один из корней больше, а другой — меньше 1 и в) когда один из корней 1, а второй меньше 1. Рассмотрим эти случаи. а) $D = 0$; $9 - 4a = 0$, $a = \frac{9}{4}$. Корень $x_0 = 1,5$ удовлетворяет условию случая; б) 1 находится между корнями квадратного трехчлена $x^2 - 3x + a$ тогда и только тогда, когда его значение при $x = 1$ отрицательно: $1 - 3 + a < 0$, $a < 2$. в) Один из корней трехчлена равен 1 при $a = 2$. В этом случае, второй корень равен 2, что не удовлетворяет условию случая. Объединяя результаты, получаем о т в е т: $a < 2$, $a = \frac{9}{4}$.

$$123. 2) \sqrt[10]{7 + 4\sqrt{3}} \cdot \sqrt[5]{\sqrt{3} - 2} = \sqrt[10]{(\sqrt{3} + 2)^2} \cdot \sqrt[5]{\sqrt{3} - 2} = \\ = \sqrt[5]{\sqrt{3} + 2} \cdot \sqrt[5]{\sqrt{3} - 2} = \sqrt[5]{3 - 4} = -1.$$

$$129. 5) \text{ в) } (\sqrt[3]{4})^x = \sqrt[5]{16}, \quad 2^{\frac{2}{3}x} = 2^{\frac{4}{5}}, \quad \frac{2}{3}x = \frac{4}{5}, \quad x = \frac{6}{5}, \\ (\sqrt[3]{4})^{\frac{6}{5}} = \sqrt[5]{16}.$$

140. 1) Введем новую переменную $y = x + 3$, где $y \geq 0$, и перепишем уравнение в виде $(y + 6)^{\frac{1}{6}} = y^{\frac{1}{2}}$. Возведем уравне-

ние в шестую степень: $y + 6 = y^3$, $y^3 - y - 6 = 0$. Попробуем подобрать целый корень. Видим, что уравнение имеет корень 2. Разложим левую часть уравнения на множители $(y - 2)(y^2 + 2y + 3) = 0$. Поскольку квадратный трехчлен $y^2 + 2y + 3$ корней не имеет, то число 2 — единственный корень уравнения $y^3 - y - 6 = 0$. Это число удовлетворяет условию введения переменной y . Вернемся к переменной x : $x + 3 = 2$, $x = -1$.

2) $2\sqrt{\frac{y+1}{y}} = \frac{-2y-3}{y+1}$. Возведем уравнение в квадрат

$$\frac{4y+1}{y} = \frac{(2y+3)^2}{(y+1)^2}, 4(y+1)^3 = y(2y+3)^2, 4y^3 + 12y^2 + 12y + 4 = 4y^3 + 12y^2 + 9y, 12y + 4 = 9y, 3y = -4, y = -\frac{4}{3}.$$

141. 1) Пусть $y = x^{\frac{1}{2}}$, где $y > 0$. Тогда нам нужно найти все значения a , при которых квадратный трехчлен $y^2 - 2ay - a + 2$ не имеет корней, больших или равных нулю. Найдем значения a , при которых трехчлен не имеет корней, и объединим их с теми значениями a , при которых корни трехчлена $y^2 - 2ay - a + 2$ отрицательны (включая возможность совпадения корней, т. е. единственности корня квадратного уравнения $y^2 - 2ay - a + 2 = 0$). $D < 0$, $a^2 + a - 2 < 0$, $-2 < a < 1$; 2) Сумма отрицательных корней отрицательна, а их произведение — положительно. По теореме Виета, если корни существуют, то должно быть $2a < 0$ и $-a + 2 > 0$. Требовать существования корней ($D \geq 0$) излишне, так как их отсутствие приведет всего лишь к дублированию найденных в (1) значений a : $\begin{cases} 2a < 0, \\ -a + 2 > 0, \end{cases} \begin{cases} a < 0, \\ a < 2, \end{cases} a < 0$. Объединяя найденные в (1) и (2) множества значений a , получаем ответ: $a < 1$.



Показательная и логарифмическая функции

154. $2^x + \frac{1}{2^x} - 2 = \frac{(2^x)^2 - 2(2^x) + 1}{2^x} > 0$, что и требовалось доказать.

155. 5) $5^{x-\sqrt{3x-5}} = 5^3$, $x - \sqrt{3x-5} - 3 = 0$, $3x - 3\sqrt{3x-5} - 9 = 0$, $(3x-5) - 3\sqrt{3x-5} - 4 = 0$, $\sqrt{3x-5} = -1$ или $\sqrt{3x-5} = 4$, $3x-5 = 16$, $x = 7$. **Примечание.** Это решение несколько экзотично — можно было решить, перенося корень в правую часть, возводя в квадрат и проверяя корни.

156. 3) $5^{x-1}(5^3 - 4 \cdot 5^2 + 4) = 29$, $5^{x-1} = 1$, $x = 1$;
6) $0,2^{x-1}(0,2^{-2} - 3 \cdot 0,2^{-1} - 6) = 500$, $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} = 125$, $5^{1-x} = 5^3$,
 $x = -2$; 8) $4^x + 4^{x-0,5} = 3^{x+0,5} + 3^{x-0,5}$, $4^{x-0,5}(2+1) = 3^{x-0,5}(3+1)$, $4^{x-1,5} = 3^{x-1,5}$, $x = 1,5$.

157. 4) Поскольку $2^x = 4 \cdot 2^{x-2}$, имеем $4 \cdot 2^{x-2} - 13 \cdot 2^{\frac{x-2}{2}} - 12 = 0$. Пусть $y = 2^{\frac{x-2}{2}}$, где $y > 0$, тогда $4y^2 - 13y - 12 = 0$.

С учетом условия $y > 0$, имеем: $y = 4$, $2^{\frac{x-2}{2}} = 2^2$, $x = 6$; 5) поскольку $5^x \neq 0$, умножая данное уравнение на 5^x , получаем $5 \cdot 5^{2x} - 2 \cdot 5^x - 3 = 0$, $5^x = 1$ или $5^x = -\frac{3}{5}$. Второе равенство не выполняется ни при каких значениях x , а первое дает $x = 0$;

6) $5 \cdot 5^x + \frac{5}{5^x} - 26 = 0$, $5 \cdot 5^{2x} - 26 \cdot 5^x + 5 = 0$, $5^x = 5$ или $5^x = 5^{-1}$, $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

158.

$$3) \begin{cases} 17(3^{\frac{x}{2}} - 2^y) = 17, \\ 3^{\frac{x}{2}} + 2^y = 17; \end{cases} \begin{cases} 3^{\frac{x}{2}} - 2^y = 1, \\ 3^{\frac{x}{2}} + 2^y = 17; \end{cases} \begin{cases} 3^{\frac{x}{2}} - 2^y = 1, \\ 2 \cdot 3^{\frac{x}{2}} = 18; \end{cases} \begin{cases} 2^y = 8, \\ 3^{\frac{x}{2}} = 9; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=3, \\ x=4; \end{cases} 4) \begin{cases} u + (\sqrt{5})^u = v + (\sqrt{5})^v, \\ u + v^2 = 12. \end{cases} \text{ В силу возрастания, функ-}$$

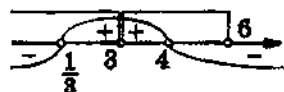
ция $y = x + (\sqrt{5})^x$ принимает равные значения при одном и том же значении аргумента, т. е. $u = v$, следовательно,

$$\begin{cases} u = v, \\ u^2 + u - 12 = 0; \end{cases} \begin{cases} u = v, \\ u = -4 \text{ или } u = 3; \end{cases} u = v = -4 \text{ или } u = v = 3.$$

159. 10) $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x < 1$. Выражение в левой части равенства задает убывающую функцию, которая принимает значение 1 при $x = 2$. Следовательно, ее значения меньше 1 при $x > 2$.

160. 2) Должно быть: $0,5^x - \frac{4}{0,5^x} - 3 > 0$; $0,5^{2x} - 3 \cdot 0,5^x - 4 > 0$; $0,5^x < -1$ или $0,5^x > 4$; $0,5^x > 0,5^{-2}$. В силу убывания показательной функции с основанием 0,5 имеем $x < -2$.

168. 4) $(\sqrt{15} - 3)^x \leq 6$, $(\sqrt{15} - 3)^x \leq (\sqrt{15} - 3)^{\log_{(\sqrt{15}-3)} 6}$. Поскольку показательная функция с основанием $\sqrt{15} - 3$ убывает ($3 < \sqrt{15} < 4$, значит, $0 < \sqrt{15} - 3 < 1$), имеем: $x \geq \log_{\sqrt{15}-3} 6$.



172. 8) $\log_{2-\frac{x}{3}} \frac{3x-1}{4-x}$. Область опре-

деления составляют решения системы

Рис. 125

$$\begin{cases} 2 - \frac{x}{3} > 0, \\ 2 - \frac{x}{3} \neq 1, \\ \frac{3x-1}{4-x} > 0; \end{cases} \begin{cases} x < 6, \\ x \neq 3, \\ \frac{3x-1}{4-x} > 0. \end{cases} \text{ Используем метод интервалов (рис. 125).}$$

Ответ: $\frac{1}{3} < x < 3$; $3 < x < 4$.

173. 5) $4^x - 6^{x+1} + 5 \cdot 9^x = 0$, $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + 5 = 0$,
 $\left(\frac{2}{3}\right)^{x_1} = 1$, $\left(\frac{2}{3}\right)^{x_2} = 5$, $x_1 = 0$, $x_2 = \log_{\frac{2}{3}} 5$.

176. 7) Рассмотрим два случая: а) $0 < x - 5 < 1$, $5 < x < 6$: $0 < x + 2 < x - 5$ — нет решений; б) $x - 5 > 1$, $x > 6$: $x + 2 > x - 5$ — все числа, удовлетворяющие условию случая, т. е.

$x > 6$. 8) Поскольку значения выражения $x - 2$, стоящего под знаком логарифма, положительны, то $x > 2$. При этом основание $x + 1$ логарифма больше 1. Имеем:

$$\begin{cases} x > 2, \\ \log_{x+1}(x-2) < \log_{x+1} \frac{1}{x+1}, \end{cases} \begin{cases} x > 2, \\ x-2 < \frac{1}{x+1}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 2, \\ (x-2)(x+1) < 1, \end{cases} \begin{cases} x > 2, \\ x^2 - x - 3 < 0, \end{cases} \begin{cases} x > 2, \\ \frac{1-\sqrt{13}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{13}}{2}, \end{cases}$$

$$2 < x < \frac{1+\sqrt{13}}{2}.$$

178. 2) Выражения, стоящие в числителе и в знаменателе дроби, существуют при $x > 0$ и обращаются в нуль при $x = 4$ и $x = 9$. Отметим это на координатной прямой и проведем линию знаков (рис. 126). Ответ: $0 < x < 4$, $x > 9$. 5) Выражения, стоящие в числителе и в знаменателе дроби, существуют при $x > 3$ и при $x < -3$. Знаменатель обращается в нуль при $x = \pm\sqrt{10}$, числитель — при $x = 10$ и $x = -1$. Отметим это на координатной прямой и проведем линию знаков (рис. 127). Ответ: $-\sqrt{10} < x < -3$, $\sqrt{10} < x < 10$.

179. 4) $\log_{x+4} \frac{x^2-1}{3} < \log_{x+4} 1$. Рассмотрим два случая:

а) $0 < x+4 < 1$ и б) $x+4 > 1$. а) $-4 < x < -3$: $\frac{x^2-1}{3} > 1$, $x^2 > 4$, $x > 2$ или $x < -2$. С учетом условия а) имеем $-4 < x < -3$; б) $x > -3$: $0 < \frac{x^2-1}{3} < 1$, $1 < x^2 < 4$, $1 < x < 2$ или $-2 < x < -1$.

При всех этих значениях условие б) выполняется. Объединяем результаты а) и б): $-4 < x < -3$, $-2 < x < -1$, $1 < x < 2$;

5) $\log_{x^2+3x-4} (x+4) > \log_{x^2+3x-4} 1$. а) $0 < x^2+3x-4 < 1$:

$$\begin{cases} x^2+3x-4 > 0, \\ x^2+3x-5 < 0; \end{cases} \begin{cases} x < -4 \text{ или } x > 1, \\ \frac{-3-\sqrt{29}}{2} < x < \frac{-3+\sqrt{29}}{2}; \end{cases} \frac{-3-\sqrt{29}}{2} < x < -4$$

или $1 < x < \frac{-3+\sqrt{29}}{2}$. При этом: $0 < x+4 < 1$, $-4 < x < -3$. Эти



Рис. 126

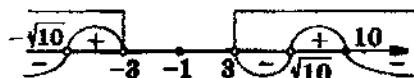


Рис. 127

значения x не удовлетворяют условию а); б) $x^2 + 3x - 4 > 1$:

$x^2 + 3x - 5 > 0$, $x < \frac{-3 - \sqrt{29}}{2}$ или $x > \frac{-3 + \sqrt{29}}{2}$. При этом $x + 4 > 1$,

$x > -3$. Поскольку $\frac{-3 + \sqrt{29}}{2} > \frac{-3 + \sqrt{25}}{2} = 1 > -3$, с учетом усло-

вия б) имеем: $x > \frac{-3 + \sqrt{29}}{2}$. б) $\log_{x+4}(x^2 + 3x - 4) < \log_{x+4} 1$.

а) $0 < x + 4 < 1$, $-4 < x < -3$. При этом: $x^2 + 3x - 4 > 1$, $x^2 + 3x -$

$-5 > 0$, $x < \frac{-3 + \sqrt{29}}{2}$ или $x > \frac{-3 + \sqrt{29}}{2}$, что не удовлетворяет

условию а). б) $x + 4 > 1$, $x > -3$. При этом $0 < x^2 + 3x - 4 < 1$,

$$\begin{cases} x^2 + 3x - 4 > 0, \\ x^2 + 3x - 5 < 0; \end{cases} \begin{cases} x < -4 \text{ или } x > 1, \\ \frac{-3 - \sqrt{29}}{2} < x < \frac{-3 + \sqrt{29}}{2}, \end{cases} \frac{-3 - \sqrt{29}}{2} < x < -4$$

или $1 < x < \frac{-3 + \sqrt{29}}{2}$. С учетом условия б) имеем $1 < x < \frac{-3 + \sqrt{29}}{2}$.

8) $\log_{x-2}(x+10) < \log_{x-2}(x-2)^2$. а) $0 < x - 2 < 1$, $2 < x < 3$.

При этом $x + 10 > x^2 - 4x + 4$, $x^2 - 5x - 6 < 0$, $-1 < x < 6$. С уче-

том условия а) имеем: $2 < x < 3$; б) $x - 2 > 1$, $x > 3$. При этом

$$0 < x + 10 < x^2 - 4x + 4,$$

$$\begin{cases} x + 10 > 0, \\ x^2 - 5x - 6 > 0; \end{cases} \begin{cases} x > -10, \\ x < -1 \text{ или } x > 6. \end{cases}$$

С учетом условия б) имеем: $x > 6$. Объединяя результаты а) и

б), получаем ответ: $2 < x < 3$, $x > 6$. 9) $\log_{2x}(x^2 - 5x + 6) <$

$< \log_{2x}(2x)$. а) $0 < 2x < 1$, $0 < x < 0,5$. При этом: $x^2 - 5x + 6 >$

$$\begin{cases} x^2 - 7x + 6 > 0, \\ 2x > 0; \end{cases} \begin{cases} x < 1 \text{ или } x > 6, \\ x > 0; \end{cases} 0 < x < 1 \text{ или } x > 6.$$

С учетом условия а) получаем $0 < x < 0,5$. б) $2x > 1$, $x > 0,5$.

При этом $0 < x^2 - 5x + 6 < 2x$,

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 > 0, \\ x^2 - 7x + 6 < 0; \end{cases} \begin{cases} x < 2 \text{ или } x > 3, \\ 1 < x < 6; \end{cases} 1 < x < 2 \text{ или } 3 < x < 6.$$

Эти значения удовлетворяют условию б). Ответ: $0 < x <$

$< 0,5$; $1 < x < 2$; $3 < x < 6$. 11) $\log_{x^2-6x+9}(x-1) < \log_{x^2-6x+9}(x^2 -$

$-6x + 9)$. а) $0 < x^2 - 6x + 9 < 1$; $0 < (x-3)^2 < 1$; $x \neq 3$ и $2 < x < 4$.

При этом $x - 1 \geq x^2 - 6x + 9$; $x^2 - 7x + 10 \leq 0$; $2 \leq x \leq 5$. С учетом условия а) имеем: $2 < x < 3$; $3 < x < 4$; 6) $x^2 - 6x + 9 > 1$; $(x - 3)^2 > 1$; $x < 2$ или $x > 4$. При этом $0 < x - 1 \leq x^2 - 6x + 9$,

$$\begin{cases} x - 1 > 0, \\ x^2 - 7x + 10 \geq 0; \end{cases} \begin{cases} x > 1, \\ x \leq 2 \text{ или } x \geq 5; \end{cases} 1 < x \leq 2, x \geq 5. \text{ С учетом}$$
условия б) получим: $1 < x < 2, x \geq 5$. Ответ: $1 < x < 2, 2 < x < 3$; $3 < x < 4; x \geq 5$.

180. 2) $\log_{0,6} \log_{0,5} (x + 1) > \log_{0,6} 1$. Поскольку логарифмические функции с основаниями 0,6 и 0,5 убывают, а выражение под знаком логарифма может принимать лишь положительные значения, имеем: $0 < \log_{0,5} (x + 1) < 1$; $\log_{0,5} 1 < \log_{0,5} (x + 1) < \log_{0,5} 0,5$; $1 > x + 1 > 0,5$; $-0,5 < x < 0$. 3) $\log_{0,2} \log_2 (2x + 3) < \log_{0,2} 5$. В силу убывания логарифмической функции с основанием 0,2 имеем: $\log_2 (2x + 3) > 5$; $\log_2 (2x + 3) > \log_2 32$. Поскольку логарифмическая функция с основанием 2 возрастает, имеем: $2x + 3 > 32$; $x > 14,5$. 5) Поскольку логарифмические функции с основаниями 3 и 32 возрастают, а с основанием 0,2 убывают, имеем: $\log_3 \log_{0,2} \log_{32} \frac{x-1}{x+5} > \log_3 1$; $\log_{0,2} \log_{32} \frac{x-1}{x+5} > \log_{0,2} 0,2$; $0 < \log_{32} \frac{x-1}{x+5} < \frac{1}{5}$;
 $\log_{32} 1 < \log_{32} \frac{x-1}{x+5} < \log_{32} 2$; $1 < \frac{x-1}{x+5} < 2$; $\begin{cases} \frac{6}{x+5} < 0, & x < -11, \\ \frac{x+11}{x+5} > 0, \end{cases}$

182. 6) $\log_{\sqrt{2}-1} (\sqrt{3} - \sqrt[4]{8}) + \log_{\sqrt{2}-1} (\sqrt{3} + \sqrt[4]{8}) = \log_{\sqrt{2}-1} (3 - \sqrt{8}) = \log_{\sqrt{2}-1} (2 - 2\sqrt{2} + 1) = \log_{\sqrt{2}-1} (\sqrt{2} - 1)^2 = 2$; 7) $\log_5 10 + 4 \log_5 10 + 3 \log_5 10 - 8 \log_5 2 = 8 (\log_5 10 - \log_5 2) = 8 \times \times \log_5 5 = 8$; 8) $\log_3 49 \cdot \log_{\sqrt{7}} 5 \cdot \log_{25} 27 = \frac{\log_3 49 \cdot \log_3 5 \cdot \log_3 27}{\log_3 \sqrt{7} \cdot \log_3 25} =$
 $= \frac{2 \log_3 7 \cdot \log_3 5 \cdot 3}{0,5 \log_3 7 \cdot 2 \log_3 5} = 6$. 9) $\log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8 \times$
 $\times \log_8 9 = \log_3 4 \cdot \frac{\log_3 5}{\log_3 4} \cdot \frac{\log_3 6}{\log_3 5} \cdot \dots \cdot \frac{\log_3 9}{\log_3 8} = \log_3 9 = 2$.

$$183. 6) \log_6 3 = \log_6 (6 : 2) = 1 - a; 7) \log_3 2 = \frac{1}{\log_2 3} =$$

$$= \frac{1}{\log_2 6 - 1} = \frac{1}{\frac{1}{a} - 1} = \frac{a}{1 - a}; 8) \log_{48} 54 = \frac{\log_6 54}{\log_6 48} = \frac{\log_6 6 + \log_6 3^2}{\log_6 6 + \log_6 2^3} =$$

$$= \frac{1 + 2\log_6 3}{1 + 3\log_6 2} = \frac{1 + 2(1 - a)}{1 + 3a} = \frac{3 - 2a}{1 + 3a}.$$

$$184. 2) \log_{30} 8 = \frac{3\lg 2}{\lg 3 + \lg 10} = \frac{3(\lg 10 - \lg 5)}{\lg 3 + 1} = \frac{3 - 3a}{b + 1}.$$

$$186. 1) 3^2 + 5 + \dots + 3n - 1 = 3^{40}, \frac{2 + (3n - 1)}{2} n = 40, 3n^2 + n -$$

$$- 80 = 0, n = 5; 2) \frac{\lg 3 \cdot \lg 4 \cdot \lg 5 \cdot \dots \cdot \lg(n+1)}{\lg 2 \cdot \lg 3 \cdot \lg 4 \cdot \dots \cdot \lg n} = 10, \lg(n+1) = 10 \lg 2, n+1 = 2^{10}, n = 1024 - 1 = 1023.$$

$$187. \log_3 2 + \log_2 3 - 2 = \log_3 \frac{2}{3} + \log_2 \frac{3}{2} > \log_3 \frac{2}{3} + \log_3 \frac{3}{2} = \log_3 1 = 0, \log_3 2 + \log_2 3 < \log_3 3 + \log_2 4 = 1 + 2 = 3, \text{ что и требовалось доказать.}$$

188. Сумма обратно пропорциональных переменных минимальна, когда значения переменных равны. $\log_x 7 = \log_7 x$, $\log_7^2 x = 1$, $\log_7 x = 1$, $\log_x 7 + \log_7 x = 2$. Перемена знаков у логарифмов (они имеют одинаковые знаки) на модуль их суммы не влияет.

$$189. 1) \log_7 8 - \log_8 9 = (\log_7 8 - 1) - (\log_8 9 - 1) = \log_7 \frac{8}{7} - \log_8 \frac{9}{8} > \log_8 \frac{8}{7} - \log_8 \frac{9}{8} > \log_8 \frac{8}{8} - \log_8 \frac{9}{8} = 0, \text{ значит, } \log_7 8 > \log_8 9.$$

$$190. 4) \log_3 x \cdot \frac{1}{2} \log_3 x \cdot \frac{1}{3} \log_3 x \cdot \frac{1}{4} \log_3 x = \frac{2}{3}, \log \frac{1}{3} x = 16, \log_3 x = 2 \text{ или } \log_3 x = -2, x = 9 \text{ или } x = \frac{1}{9}; 8) \lg(5^x + x - 20) =$$

$$= \lg \frac{10^x}{2^x}, 5^x + x - 20 = 5^x, x = 20; 10) 3x - 3x \log_6 2 = \log_6(3^{3x} + x^2 - 9), 3x(\log_6 6 - \log_6 2) = \log_6(3^{3x} + x^2 - 9), \log_6 3^{3x} = \log_6(3^{3x} + x^2 - 9), 3^{3x} = 3^{3x} + x^2 - 9, x^2 - 9 = 0, x_1 = -3, x_2 = 3; 14) 2 \log_x 2 + 6 \log_{2x} 2 = 3, \frac{2}{\log_2 x} + \frac{6}{1 + \log_2 x} = 3, 2 + 2 \log_2 x + 6 \log_2 x = 3 \log_2 x + 3 \log_2^2 x, 3 \log_2^2 x - 5 \log_2 x - 2 = 0,$$

$\log_2 x = 2$ или $\log_2 x = -\frac{1}{3}$, $x = 4$ или $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$; 18) $(2 + 2 \log_x 3) \times$
 $\times \log_{\frac{2}{3}}^2 x = 4$, $\left(1 + \frac{1}{\log_3 x}\right) \log_{\frac{2}{3}}^2 x = 2$, $\log_{\frac{2}{3}}^2 x + \log_3 x - 2 = 0$,
 $\log_3 x = 1$ или $\log_3 x = -2$, $x = 3$ или $x = \frac{1}{9}$.

191. 6) $\log_{\frac{2}{3}}^2 x = 2 + \log_2 x$, $\log_2 x = -1$ или $\log_2 x = 2$, $x = 0,5$
 или $x = 4$; 10) $5^{x+1} \cdot 5 = 3^{2x+1}$, $5^{x+2} = 3^{2x+1}$, $(x+2) \log_3 5 =$
 $= 2x + 1$, $x = \frac{1 - 2 \log_3 5}{\log_3 5 - 2} = \frac{\log_3 \frac{3}{25}}{\log_3 \frac{5}{9}} = \log_{\frac{5}{9}} \frac{3}{25}$; 11) нужно найти

положительные корни уравнения. Рассмотрим два случая:

а) $x = 1$ и б) $x \neq 1$: а) $1^{\sqrt{x}} = (\sqrt[3]{1})^1$ — верное равенство, значит,
 1 — корень уравнения; б) логарифмируем по основанию x :

$\sqrt[n]{x} = \frac{x}{n}$, $n = x^{1-\frac{1}{n}}$, $n = x^{\frac{n-1}{n}}$, $x = n^{\frac{n}{n-1}}$; 12) $\log_9 (x+3) \cdot \log_3 x =$
 $= \log_3 x \cdot \log_3 5$, $\log_3 x = 0$ или $\frac{1}{2} \log_3 (x+3) = \log_3 5$, $x = 1$ или
 $x = 22$.

195. 2) ОДЗ неравенства $-\frac{3}{2} < x < \frac{2}{3}$. Для этих значений x :
 $\log_{\sqrt{3}-1} (-2x^2 + 5x + 12) < \log_{\sqrt{3}-1} (2 - 3x)$. Поскольку $\sqrt{3} - 1 < 1$,

логарифмическая функция с основанием $\sqrt{3} - 1$ убываю-
 щая, следовательно, $-2x^2 + 5x + 12 > 2 - 3x$, $2x^2 - 8x - 10 < 0$,
 $-1 < x < 5$. С учетом ОДЗ получаем ответ: $-1 < x < \frac{2}{3}$.

4) $-\log_{\frac{1}{3}} (3^x - 1)(2 + \log_{\frac{1}{3}} (3^x - 1)) + 3 > 0$. Неравенство
 $-2 \log_{\frac{1}{3}} (3^x - 1) - \log_{\frac{1}{3}}^2 (3^x - 1) + 3 > 0$ решаем как квадратное
 относительно $\log_{\frac{1}{3}} (3^x - 1)$: $-3 < \log_{\frac{1}{3}} (3^x - 1) < 1$. Учитывая

убывание логарифмической функции с основанием $\frac{1}{3}$, полу-
 чаем $\frac{1}{3} < 3^x - 1 < 27$, $\frac{4}{3} < 3^x < 28$. Учитывая возрастание
 показательной функции с основанием 3, получаем ответ:

$\log_3 \frac{4}{3} < x < \log_3 28$; 6) ОДЗ неравенства: $0 < x < 1, 1 < x < 2$.

Для этих значений x : $\log_x (x+1) < \log_x (2-x)^{-1}$. Рассмотрим два случая: а) $0 < x < 1$. Логарифмическая функция с основанием x убывает, значит, $x+1 > \frac{1}{2-x}$. Поскольку $2-x > 0$,

имеем: $(x+1)(2-x)-1 > 0, x^2-x-1 < 0, \frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

С учетом условия а) получаем: $0 < x < 1$; б) $1 < x < 2$. Логарифмическая функция с основанием x возрастает, значит, $x+1 < \frac{1}{2-x}$.

Поскольку $2-x > 0$, имеем: $(x+1)(2-x)-1 < 0, x^2-x-1 > 0, x < \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ или $x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. С учетом условия б) получаем: $\frac{1+\sqrt{5}}{2} <$

$x < 2$. Ответ: $0 < x < 1, \frac{1+\sqrt{5}}{2} < x < 2$. 7) $\frac{1}{2} \log_2 \log_2 x +$

$+\log_2 \left(\frac{1}{2} \log_2 x\right) < 0, \frac{1}{2} \log_2 \log_2 x - 1 + \log_2 \log_2 x < 0, \frac{3}{2} \log_2 \log_2 x <$

$< 1, \log_2 \log_2 x < \frac{2}{3}, \log_2 \log_2 x < \log_2 2^{\frac{2}{3}}, 0 < \log_2 x < 2^{\frac{2}{3}}, 1 < x <$

$< 2^{\frac{3}{4}}$. 8) $\log_x \log_2 (4^x - 12) < \log_x x$. ОДЗ: $x > \log_4 13 > 1$. При этом логарифмическая функция с основанием x возрастает, значит, $\log_2 (4^x - 12) < x, \log_2 (4^x - 12) < 2^x$. Логарифмическая

функция с основанием 2 возрастает, значит, $4^x - 12 < 2^x$; $4^x - 2^x - 12 < 0$; $-3 < 2^x < 4$; $2^x < 2^2$. Показательная функция с основанием 2 возрастает, значит, $x < 2$. С учетом ОДЗ получаем ответ: $\log_4 13 < x < 2$. 9) $\log_{0,5} \log_2 \log_{x-1} 9 > \log_{0,5} 1$.

Поскольку логарифмическая функция с основанием 0,5 убывает, а выражение под знаком логарифма должно принимать положительные значения, имеем: $0 < \log_2 \log_{x-1} 9 < 1, \log_2 1 < < \log_2 \log_{x-1} 9 < \log_2 2$. Поскольку логарифмическая функция с основанием 2 возрастает, имеем: $1 < \log_{x-1} 9 < 2$. Рассмотрим два случая: а) $0 < x-1 < 1, 1 < x < 2$: $\log_{x-1} (x-1) < < \log_{x-1} 9 < \log_{x-1} (x-1)^2$. Поскольку логарифмическая функция с основанием $x-1$ убывает (условие случая), имеем:

ем: $\begin{cases} x-1 > 9, \\ 9 > (x-1)^2; \end{cases} \begin{cases} x > 10, \\ |x-1| < 3; \end{cases}$ нет решений; б) $x-1 > 1, x > 2$:

$\log_{x-1} (x-1) < \log_{x-1} 9 < \log_{x-1} (x-1)^2$. Поскольку логарифмическая функция с основанием $x-1$ возрастает (условие

случая), имеем: $\begin{cases} x-1 < 9, \\ 9 < (x-1)^2; \end{cases} \begin{cases} x < 10, \\ |x-1| > 3. \end{cases}$ С учетом условия

случая получаем: $4 < x < 10$. О т в е т: $4 < x < 10$. 10) Заметим,

что $\log_{x^2} x^4 = 2$. Имеем $\log_3 \log_{x^2} 2 > \log_3 1$. Поскольку логарифмическая функция с основанием 3 возрастает, то $\log_{x^2} 2 > 1$,

$\log_{x^2} 2 > \log_{x^2} x^2$. Рассмотрим два случая: а) $x^2 < 1$. Поскольку

логарифмическая функция с основанием x^2 убывает, имеем

$x^2 > 2$, что не удовлетворяет условию случая; б) $x^2 > 1$. По-

скольку логарифмическая функция с основанием x^2 возрастает, имеем:

$x^2 < 2$. С учетом условия б) имеем $1 < x^2 < 2$, откуда

получаем о т в е т: $-\sqrt{2} < x < -1, 1 < x < \sqrt{2}$.

Г Л А В А



Тригонометрические функции и их свойства

207. 1) $360 : (30 + 45) = 4,8$ (с). За время между двумя последовательными встречами первая точка поворачивается вокруг центра окружности на $30^\circ \cdot 4,8 = 144^\circ$. Пусть через x поворотов на 144° точка оказалась на месте старта, тогда $144^\circ \cdot x = 360^\circ \cdot n$. Найдем наименьшее натуральное значение x , удовлетворяющее этому уравнению: $144x = 360 \cdot n$, $2x = 5n$, значит, x делится на 5. Наименьшее натуральное число, кратное 5, — это $5:2 \cdot 5 = 5 \cdot 2$. Таким образом, каждая пятая встреча точек происходит в стартовой точке. Значит, кроме нее есть еще 4 точки встречи, т. е. всего 5 точек встречи. 3) Через $4,8 \cdot 5 = 24$ (с).

217. Вокруг своей оси Земля поворачивается примерно за 24 часа. $2\pi : 24 \approx 3,14 : 12 \approx 0,26$ (рад/ч).

222. 5) $\beta = 5,5 \approx \frac{5,5 \cdot 180^\circ}{3,14} \approx 315^\circ$. Угол β в IV четверти, значит, $\cos \beta > 0$, $\sin \beta < 0$.

254. 2) в) Общий вид уравнения прямой $y = kx + b$, где $k = \operatorname{tg} \alpha$, а α — угол между заданной прямой и осью абсцисс. $\alpha = 120^\circ$, $\operatorname{tg} 120^\circ = -\sqrt{3}$. Если прямая проходит через точку, заданную координатами, то в уравнение прямой подставляем ее координаты и находим значение b : $3 = -\sqrt{3} \cdot 0 + b$, $b = 3$. Уравнение прямой $y = -\sqrt{3}x + 3$.

271. 1) $4 \sin^2 x + 5 \sin x + 1 = 0$. Решим это уравнение как квадратное относительно $\sin x$: $\sin x = -1$ и $\sin x = -\frac{1}{4}$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = -\arcsin \frac{1}{4} + 2\pi n$, $x = \pi + \arcsin \frac{1}{4} + 2\pi n$, n — любое целое число.

283. 2) $\arccos \left(\cos \frac{24\pi}{7} \right) = \arccos \left(\cos \left(4\pi - \frac{4\pi}{7} \right) \right) = \arccos \left(\cos \frac{4\pi}{7} \right) = \frac{4\pi}{7}$; 3) $\arccos (\sin 6) = \arccos \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} - 6 \right) \right) = \arccos \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} - 6 + 2\pi \right) \right) = \frac{\pi}{2} - 6 + 2\pi$.

298. Решением будут те и только те значения a , при которых функция $t = z^2 + 6z + a$ принимает только положительные значения на промежутке $[-1; 1]$ ($z = \sin 2x$). Абсцисса вершины параболы $t = z^2 + 6z + a$ равна -3 . Для выполнения требования задачи достаточно, чтобы значение функции t в точке $z = -1$ было положительным: $(-1)^2 + 6(-1) + a > 0$, $a > 5$.

299. 1) Чтобы на интервале y квадратного трехчлена было наименьшее или наибольшее значение, абсцисса вершины соответствующей параболы должна принадлежать этому интервалу. Находим границы интервала: $\sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) = -\frac{1}{2}$, $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

Абсцисса вершины параболы равна a , значит, $-0,5 < a < 0,5$.

2) Рассматриваем правую часть равенства как квадратный трехчлен относительно косинуса на промежутке значений косинуса $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 1 \right]$. Чтобы трехчлен на этом промежутке имел наименьшее значение, абсцисса вершины соответствующей па-

работы должна или принадлежать этому промежутку, или быть больше его правой границы. Значит, $a > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

316. 1) $\sin 2x > \frac{1}{2}$, $\frac{\pi}{6} + 2\pi n < 2x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $\frac{\pi}{12} + \pi n < x < \frac{5\pi}{12} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $\sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) < -\frac{1}{2}$. По формулам приведения $\sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos 3x$, $\cos 3x < -\frac{1}{2}$, $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k < 3x < \frac{4\pi}{3} + 2\pi k$, $\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}k < x < \frac{4\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}k$, $k \in \mathbb{Z}$.

333. 1) Соседние нули функции отстоят друг от друга на $\frac{\pi}{2}$, значит, период функции не может быть меньше $\frac{\pi}{2}$. Проверим, является ли данное число периодом, т. е. выполняется ли равенство $\operatorname{tg} 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Равенства верны, следовательно, $\frac{\pi}{2}$ — период функции $y = \operatorname{tg} 2x$.

341. 9) Возведем уравнение в квадрат и после упрощения получим: $\sin x \cdot \cos x = \frac{12}{25}$. По теореме, обратной теореме Виета, $\sin x$ и $\cos x$ — корни квадратного уравнения $z^2 - \frac{7}{5}z + \frac{12}{25} = 0$, $z_1 = \frac{3}{5}$, $z_2 = \frac{4}{5}$. Один из корней — косинус, а другой — синус, или наоборот. Имеем: $\cos x = \frac{3}{5}$ или $\cos x = \frac{4}{5}$. Ответ: $\pm \arccos \frac{3}{5} + 2\pi n$, $\pm \arccos \frac{4}{5} + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$).

345. 2) Рассмотрим разность $(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) - 2 = \operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} - 2 = \frac{\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x + 1}{\operatorname{tg} x} = \frac{(\operatorname{tg} x - 1)^2}{\operatorname{tg} x} > 0$, поскольку тангенс острого угла положителен, значит, для любого острого угла x полученное неравенство верно, т. е. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x > 2$. Что и требовалось доказать.

360. $\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = (\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta)(\sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta) = \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta =$

$$= (\sin^2 \alpha \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta) - (\cos^2 \alpha \sin^2 \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta) = \\ = \sin^2 \alpha (\cos^2 \beta + \sin^2 \beta) - \sin^2 \beta (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = \sin^2 \alpha - \\ - \sin^2 \beta.$$

379. 1) Найдем тангенс разности углов, образованных этими прямыми с осью абсцисс: $\operatorname{tg} \alpha = 2$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{3}$. Подставим значения тангенсов в формулу $\operatorname{tg} (\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$, получим:

$$\operatorname{tg} (\alpha - \beta) = \frac{2 - \frac{1}{3}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{3}} = 1, \text{ значит, } \alpha - \beta = 45^\circ.$$

420. 1) Представим $\sin \alpha = \cos \beta$ следующим образом: $\sin \alpha = -\sin \left(\frac{\pi}{2} + \beta \right)$. Тогда $\alpha = \beta + \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ или $\alpha = -\beta - \frac{\pi}{2} + \pi(2n + 1)$, $n \in \mathbb{Z}$. $x_1 = -\frac{\pi}{2} - 2\pi n$ или $x_2 = \frac{\pi}{14} + \frac{2\pi n}{7}$, $n \in \mathbb{Z}$. 2) $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} \beta$, $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right)$. Тогда $\alpha = -\beta + \frac{\pi}{2} + \pi n$. От равенства значений функций $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{ctg} 5x$ перейдем к условию равенства аргументов $2x = \frac{\pi}{2} - 5x + \pi n$, $2x + 5x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $7x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{14} + \frac{\pi}{7} n$, $n \in \mathbb{Z}$.

421. Из данного равенства следует, что точка с координатами $(x; y)$ лежит на окружности с центром в начале координат и радиусом, равным 1. Но по определению абсциссы точки этой окружности является синусом, а ордината — косинусом некоторого угла поворота φ , т. е. $\sin \varphi = x$ и $\cos \varphi = y$, что и требовалось доказать.

423. 10) $(\cos 3x + \cos 7x) + (1 + \cos 10x) = 0$; $2 \cos 5x \cos 2x + 2 \cos^2 5x = 0$; $2 \cos 5x \left(2 \cos \frac{7}{2} x \cos \frac{3}{2} x \right) = 0$. $\cos 5x = 0$ или $\cos \frac{7}{2} x = 0$, или $\cos \frac{3}{2} x = 0$. 18) $1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0$; $(1 + \cos 2x) + \sin 2x + (\sin x + \cos x) = 0$; $2 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x + (\sin x + \cos x) = 0$; $2 \cos x (\cos x + \sin x) + (\sin x + \cos x) = 0$; $(\sin x + \cos x)(2 \cos x + 1) = 0$; $\cos x = -\frac{1}{2}$ или $\sin x = -\cos x$.

424. $4 \sin 3x \sin x - 2 \cos 2x + 1 = 0$. Поскольку $2 \sin 3x \times \sin x = \cos 2x - \cos 4x$, имеем $2 \cos 2x - 2 \cos 4x - 2 \cos 2x + 1 = 0$; $2 \cos 4x - 1 = 0$; $\cos 4x = \frac{1}{2}$, $4x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $x = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. Искомый корень уравнения $x = \frac{\pi}{12}$.

$$426. \frac{2 \cos^2 x + \cos x}{2 \cos x + 7 \sin^2 x} = \frac{1}{2}, \frac{4 \cos^2 x + 2 \cos x + 2 \cos x + 7 \sin^2 x}{2(2 \cos x + 7 \sin^2 x)} = 0,$$

$4 \cos^2 x + 4 \cos x + 7 - 7 \cos^2 x = 0$, $3 \cos^2 x - 4 \cos x - 7 = 0$, $\cos x = -1$. На отрезке $[-\pi; \pi]$ $\cos x = -1$ при $x = \pm \pi$. Эти значения не обращают знаменатель в нуль.

427. 2) $\sqrt{3} \sin x + 2 \cos x = \sqrt{3} + 2 \sin x \cos x$; $\sqrt{3} + 2 \sin x \times \cos x - 2 \cos x - \sqrt{3} \sin x = 0$; $\sqrt{3}(1 - \sin x) - 2 \cos x(1 - \sin x) = 0$; $(1 - \sin x)(\sqrt{3} - 2 \cos x) = 0$; $\sin x = 1$ или $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ или $x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Из множества решений выбираем те, которые удовлетворяют условию $0 < x < 2$: $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{\pi}{6}$.

$$429. 2) \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\sqrt{2} \cos x} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x)}{\sqrt{2} \cos x} = \frac{1}{2} (1 - \operatorname{tg} x). 5 + 2^{\operatorname{tg} x} =$$

$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\sqrt{2} \cos x}$
 $= 3 \cdot 4^{\frac{1}{2} \cos x}$; $5 + 2^{\operatorname{tg} x} = 3 \cdot 4^{\frac{1}{2}(1 - \operatorname{tg} x)}$; $5 + 2^{\operatorname{tg} x} = 3 \cdot 2^{1 - \operatorname{tg} x}$,
 $2^{\operatorname{tg} x} - 6 \cdot 2^{-\operatorname{tg} x} + 5 = 0$. Обозначим $2^{\operatorname{tg} x} = y$ и найдем положительный корень уравнения $y - \frac{6}{y} + 5 = 0$; $y^2 + 5y - 6 = 0$; $y = 1$.

Вернемся к переменной x : $2^{\operatorname{tg} x} = 1$; $\operatorname{tg} x = 0$; $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

4) пусть $2^x = y$, где $y > 0$, тогда $\frac{1}{\operatorname{tg} y} - \operatorname{tg} y = 2 \operatorname{tg} 2y$; $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 y}{\operatorname{tg} y} =$

$= 2 \operatorname{tg} 2y$; $\operatorname{ctg} 2y = \operatorname{tg} 2y$; $2y = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, где, поскольку значения y должны быть положительными, $n = 0, 1, 2, \dots$, $y = \frac{\pi}{8} +$

$+\frac{\pi n}{4}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Вернемся к переменной x : $2^x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$

($n = 0, 1, 2, 3, \dots$), $x = \log_2\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}\right)$, где $n = 0, 1, 2, 3, \dots$.



Повторение

434. 4) Должно выполняться условие $x - 5 > 0$, т. е. $x > 5$.

Заметим, что для этих значений x основание логарифма $\frac{x+4}{x+1}$,

большим 1. $\log_{\frac{x+4}{x+1}}(x-5) < 1$, $\log_{\frac{x+4}{x+1}}(x-5) < \log_{\frac{x+4}{x+1}} \frac{x+4}{x+1}$.

В силу возрастания логарифмической функции с основанием

больше 1 имеем: $0 < x - 5 < \frac{x+4}{x+1}$, $\begin{cases} x > 5, \\ (x-5)(x+1) < x+4, \end{cases}$

$\begin{cases} x > 5, \\ x^2 - 5x - 9 < 0, \end{cases} \begin{cases} x > 5, \\ \frac{5-\sqrt{61}}{2} < x < \frac{5+\sqrt{61}}{2}, \end{cases} 5 < x < \frac{5+\sqrt{61}}{2}.$

441. 1) г) $\sin 10 = \sin(3\pi + (10 - 3\pi)) = -\sin(10 - 3\pi) =$
 $= \sin(3\pi - 10)$. Поскольку $-\frac{\pi}{2} < 3\pi - 10 < \frac{\pi}{2}$ имеем: $\arcsin(\sin 10) =$
 $= \arcsin(\sin(3\pi - 10)) = 3\pi - 10$; 4) д) $\operatorname{arccotg}(\operatorname{tg} 2) = \operatorname{arccotg}\left(\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - 2\right)\right) = \frac{3\pi}{2} - 2.$

442. 1) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) < \arcsin(x^2 - 1,5x) < \arcsin \frac{1}{2}$. Поскольку арксинус является возрастающей функцией, имеем:

$-\frac{1}{2} < x^2 - 1,5x < \frac{1}{2}$; $-1 < 2x^2 - 3x < 1$; $\begin{cases} 2x^2 - 3x + 1 > 0, \\ 2x^2 - 3x - 1 < 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x < 0,5 \text{ или } x > 1, \\ \frac{3-\sqrt{17}}{4} < x < \frac{3+\sqrt{17}}{4}; \end{cases} \frac{3-\sqrt{17}}{4} < x < 0,5 \text{ или } 1 < x < \frac{3+\sqrt{17}}{4}.$

2) $-\frac{8}{2} < \arccos x < \frac{1}{3}$. С учетом области значений арккосинуса имеем: $0 < \arccos x < \frac{1}{3}$, $\arccos 1 < \arccos x < \arccos \cos \frac{1}{3}$. Поскольку функция арккосинус убывает, окончательно получаем: $\cos \frac{1}{3} < x < 1.$

461. 4) $\log_{7-x}(x^3 + 9) = \log_{7-x}((x+3)(x-1)^2)$; $x^3 + 9 = (x+3)(x-1)^2$. При этом должны выполняться условия: $7-x > 0$; $7-x \neq 1$; $x^3 + 9 > 0$. Далее получаем: $x^2 - 5x - 6 = 0$; $x = 6$ или $x = -1$. Проверка: $x = 6$, $7-6 > 0$ — верно, $7-6 \neq 1$ — неверно, следовательно, 6 — посторонний корень; $x = -1$, $7-(-1) > 0$ — верно, $7-(-1) \neq 1$ — верно, $(-1)^3 + 9 > 0$ — верно, следовательно, -1 — корень исходного уравнения. О т в е т: -1 .

6) $\log_{\cos x} \sin x + \frac{1}{\log_{\cos x} \sin x} = 2$. Поскольку ни при каком значении x $\log_{\cos x} \sin x$ не равен нулю, имеем: $\log_{\cos x}^2 \sin x - 2 \log_{\cos x} \sin x + 1 = 0$; $\log_{\cos x} \sin x = 1$; $\sin x = \cos x$ при условии, что $\cos x > 0$ и $\cos x \neq 1$. С учетом этого условия оконча-

тельно получаем: $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$). 7) $\operatorname{tg}^2 |x| = \frac{1 - \cos |x|}{1 - \sin |x|}$,

$\frac{\sin^2 |x|}{\cos^2 |x|} = \frac{1 - \cos |x|}{1 - \sin |x|}$. При условии $\cos^2 |x| \neq 0$, $1 - \sin |x| \neq 0$, по-

лучаем: $\sin^2 |x| - \sin^3 |x| = \cos^2 |x| - \cos^3 |x|$; $(\cos |x| - \sin |x|) \times (\cos |x| + \sin |x|) = (\cos |x| - \sin |x|)(1 + \cos |x| \sin |x|)$; $(\cos |x| - \sin |x|) \times (1 + \cos |x| \sin |x| - \cos |x| - \sin |x|) = 0$; $(\cos |x| - \sin |x|)(1 - \sin |x|) \times (1 - \cos |x|) = 0$; $\cos |x| - \sin |x| = 0$ или $1 - \sin |x| = 0$, или $1 - \cos |x| = 0$. Условию удовлетворяет только первое и третье

равенство: $\cos |x| = \sin |x|$ или $\cos |x| = 1$, $|x| = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$ или $|x| = 2\pi k$,

$x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k$ или $x = 2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$). О т в е т: $\pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$).

8) $2 \sin 2x + \cos 2x + 1 = 0$. Рассмотрим 2 случая: а) $x = \frac{\pi}{2} +$

$+\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$) и б) $\frac{4 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + 1 = 0$. а) $2 \sin (\pi + 2\pi k) +$

$+\cos (\pi + 2\pi k) + 1 = 0$; $0 - 1 + 1 = 0$, следовательно, $\frac{\pi}{2} + \pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$) —

корни исходного уравнения. б) $4 \operatorname{tg} x + 1 - \operatorname{tg}^2 x + 1 + \operatorname{tg}^2 x = 0$;

$\operatorname{tg} x = -0,5$; $x = -\operatorname{arctg} 0,5 + \pi k$. Объединяем результаты обоих

случаев и записываем о т в е т: $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $-\operatorname{arctg} 0,5 + \pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$).

$$462. 4) (6x - 5)\sqrt{2x^2 - 7x - 9} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 7x - 9 = 0, \\ 2x^2 - 7x - 9 > 0, \\ 6x - 5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ или } x = 4,5, \\ x < -1, \text{ или } x > 4,5 \\ x > \frac{5}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ x > 4,5. \end{cases}$$

7) $\lg(x-2)^2 < \lg(x^2-4) - \lg(-x-2)$; $\lg(x-2)^2 < \lg((-x-2) \times (2-x)) - \lg(-x-2)$. Должно выполняться условие $-x-2 > 0$; т. е. $x < -2$. Тогда $2-x > 0$. $2 \lg(2-x) < \lg(2-x)$. $\lg(2-x) < 0$, $\lg(2-x) < \lg 1$. Поскольку логарифмическая функция с основанием 10 возрастает, получаем $0 < 2-x < 1$, $1 < x < 2$, что не удовлетворяет условию $x < -2$. Ответ: нет решений.

$$463. 2) \sqrt{2x+3} + \sqrt{x-2} = 4 \Leftrightarrow 2x+3 + x-2 + + 2\sqrt{2x+3} \cdot \sqrt{x-2} = 16 \Leftrightarrow 2\sqrt{2x+3} \cdot \sqrt{x-2} = 15-3x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3 > 0, \\ x-2 > 0, \\ 15-3x > 0, \\ 8x^2-4x-24 = 225+9x^2-90x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x < 5, \\ x^2-86x+249 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x < 5, \\ \begin{cases} x = 3, \\ x = 83 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

$$4) \log_{7-x}(x^3+9) = \log_{7-x}((x+3)(x-1)^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7-x > 0, \\ 7-x \neq 1, \\ x^3+9 > 0, \\ x^3+9 = (x+3)(x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7-x > 0, \\ 7-x \neq 1, \\ x^3+9 > 0, \\ x^2-5x-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7-x > 0, \\ 7-x \neq 1, \\ x^3+9 > 0, \\ \begin{cases} x = -1, \\ x = 6 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -1.$$

$$5) |\sin x| \cos x = \sin^2 x \Leftrightarrow |\sin x| \cos x = |\sin x|^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos x = |\sin x| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi n, \\ x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \end{cases} (n \in \mathbb{Z}).$$

$$7) \operatorname{tg}^2 x = \frac{1 - \cos x}{1 - \sin |x|} \Leftrightarrow \frac{\sin^2 |x|}{\cos^2 |x|} = \frac{1 - \cos |x|}{1 - \sin |x|} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos |x| \neq 0, \\ 1 - \sin |x| \neq 0, \\ (\cos |x| - \sin |x|)(1 - \sin |x|)(1 - \cos |x|) = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos |x| \neq 0, \\ 1 - \sin |x| \neq 0, \\ \begin{cases} \cos |x| = \sin |x|, \\ 1 - \sin |x| = 0, \\ 1 - \cos |x| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \\ x = 2\pi k, \end{cases} (k \in \mathbb{Z}). \end{cases}$$

$$466. 3) \log_{\frac{x^2-1}{3}}(x+4) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 > 0, \\ x + 4 > 0, \\ (x+3)\left(\frac{x^2-1}{3} - 1\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < x < -1, \\ x > 1, \\ (x+3)(x-2)(x+2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x < -2, \\ x > 2. \end{cases}$$

$$5) \log_{x^2+3x-4}(x+4) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x - 4 > 0, \\ x + 4 > 0, \\ (x^2 + 3x - 5)(x+3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+4)(x-1) > 0, \\ x + 4 > 0, \\ \left(x + \frac{3+\sqrt{29}}{2}\right)\left(x + \frac{3-\sqrt{29}}{2}\right)(x+3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ \begin{cases} \frac{-3-\sqrt{29}}{2} < x < -3, \\ x > \frac{-3+\sqrt{29}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{-3+\sqrt{29}}{2}. \end{cases}$$

$$467. 1) \log_{g(x)} f(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (f(x)-1)(g(x)-1) < 0, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

$$4) \log_{x+4} \frac{x^2-1}{3} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 > 0, \\ x + 4 > 0, \\ (x + 3)\left(\frac{x^2 - 1}{3} - 1\right) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < x < -1, \\ x > 1, \\ (x + 3)(x - 2)(x + 2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4 < x < -3, \\ -2 < x < -1, \\ 1 < x < 2. \end{cases}$$

$$6) \log_{x+4}(x^2 + 3x - 4) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x - 4 > 0, \\ x + 4 > 0, \\ (x^2 + 3x - 5)(x + 3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x + 4)(x - 1) > 0, \\ x + 4 > 0, \\ \left(x + \frac{3 + \sqrt{29}}{2}\right)\left(x + \frac{3 - \sqrt{29}}{2}\right)(x + 3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ \left(x + \frac{3 + \sqrt{29}}{2}\right)\left(x + \frac{3 - \sqrt{29}}{2}\right) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ \frac{-3 - \sqrt{29}}{2} < x < \frac{-3 + \sqrt{29}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < \frac{-3 + \sqrt{29}}{2}.$$

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

Корни квадратного уравнения

$ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0)$	$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
$ax^2 + 2kx + c = 0 \ (a \neq 0)$	$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$
$ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0) \ a + b + c = 0$	$x_1 = 1, x_2 = -\frac{c}{a}$
$ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0) \ a - b + c = 0$	$x_1 = -1, x_2 = -\frac{c}{a}$
Формулы Виета	
$x^2 + px + q = 0$	$x_1 + x_2 = -p, x_1 \cdot x_2 = q$

Разложение квадратного трехчлена на множители

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Координаты вершины параболы — графика квадратного трехчлена $y = ax^2 + bx + c$

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Разложение на множители многочлена n -й степени, имеющего корень x_1 (следствие из теоремы Безу)

$$P_n(x) = (x - x_1)P_{n-1}(x)$$

Свойства корней

квадратных	степени n
$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$	$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
$\sqrt{a^m} = (\sqrt{a})^m$	$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$
$\sqrt[nk]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}$ $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$	

Степени и логарифмы

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, a > 0$ $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ $(a^x)^y = a^{xy}$ $a^x \cdot b^x = (ab)^x$ $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$	$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$ $(b > 0, a > 0, a \neq 1)$ $a^{\log_a b} = b$ $\log_c (ab) = \log_c a + \log_c b$ $\log_c \left(\frac{a}{b}\right) = \log_c a - \log_c b$ $\log_a (b^c) = c \log_a b$ $\log_{a^c} b = \frac{1}{c} \log_a b$ $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$
--	---

Тригонометрия

Некоторые значения тригонометрических функций

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0	—

Формулы приведения

α	$\varphi + 2\pi$	$-\varphi$	$\pi - \varphi$	$\pi + \varphi$	$\frac{\pi}{2} - \varphi$	$\frac{\pi}{2} + \varphi$	$\frac{3\pi}{2} - \varphi$	$\frac{3\pi}{2} + \varphi$
$\sin \alpha$	$\sin \varphi$	$-\sin \varphi$	$\sin \varphi$	$-\sin \varphi$	$\cos \varphi$	$\cos \varphi$	$-\cos \varphi$	$-\cos \varphi$
$\cos \alpha$	$\cos \varphi$	$\cos \varphi$	$-\cos \varphi$	$-\cos \varphi$	$\sin \varphi$	$-\sin \varphi$	$-\sin \varphi$	$\sin \varphi$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \varphi$	$-\operatorname{tg} \varphi$	$-\operatorname{tg} \varphi$	$\operatorname{tg} \varphi$	$\operatorname{ctg} \varphi$	$-\operatorname{ctg} \varphi$	$\operatorname{ctg} \varphi$	$-\operatorname{ctg} \varphi$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \varphi$	$-\operatorname{ctg} \varphi$	$-\operatorname{ctg} \varphi$	$\operatorname{ctg} \varphi$	$\operatorname{tg} \varphi$	$-\operatorname{tg} \varphi$	$\operatorname{tg} \varphi$	$-\operatorname{tg} \varphi$

Основные тождества

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 & \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha &= 1 \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} & 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha &= \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ \operatorname{ctg} \alpha &= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} & 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha &= \frac{1}{\sin^2 \alpha} \end{aligned}$$

Формулы сложения

$$\begin{aligned} \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \\ \operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) &= \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} \end{aligned}$$

Формулы двойного угла

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha \\ \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \end{aligned}$$

Переход от суммы к произведению

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

Переход от произведения к сумме

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$$

Формулы понижения степени

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \quad \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$$

Вспомогательный угол

$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi),$$

$$\text{где } \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Универсальная подстановка

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad \cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

Решение уравнений

$$\sin x = a, |a| \leq 1, x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = a, |a| \leq 1, x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg} x = a, x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{ctg} x = a, x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Предметный указатель

- Аргумент функции 9
Арккосинус 122
Арктангенс 123
Арсинус 121
Арктангенс 123
Асимптота 17
— горизонтальная 17, 149
— вертикальная 17, 149
Вспомогательный угол 186, 286
Геометрическое место точек 18
Гипербола 16, 18
Дробная часть числа 25
Единичная окружность 109
Корень n -ой степени 48
Косинус угла 109
Косинусоида 143
Котангенс угла 116
Котангенсоида 151
Координаты вершины параболы 34, 283
Корни квадратного уравнения 283
Линейная скорость 106
Логарифм 82
— десятичный 93
— натуральный 93
Логарифмическая функция 83
Мантисса логарифма 95
Метод интервалов 26
Область значений функции 9, 192
— определения функции 9, 191
Обратные тригонометрические функции 198, 199
Объединение множеств 10
Окрестность точки 24
Основное логарифмическое тождество 82
— тригонометрическое тождество 156, 285
Ось котангенсов 117
— тангенсов 116
Парабола 18
Пересечение множеств 10
Период функции 137, 202
Подкоренное выражение 49
Подмножество 10
Показатель степени 49
— дробный 62
— рациональный 62
Потенцирование 91
Прямая 18
Преобразование графика 35, 202
Промежуток знакопостоянства 26
— монотонности 28

Равносильное преобразование
 — — неравенства 207
 — — уравнения 207
 Радиан 105
 Радианная мера угла 106
 Разложение многочлена на множители 283
 Синус угла 109
 Синус числового аргумента 110
 Синусоида 138
 Свойства корней 57, 58, 284
 — логарифмов 90, 91, 284
 — степени 73, 284
 Скорость линейная 106
 — угловая 106
 Таблица значений тригонометрических функций 284, 285
 Тангенс угла 115
 Тангенсоида 150
 Теорема Безу 45
 Теорема о промежуточном значении 26
 Точка разрыва 26
 Тригонометрия 100
 Угловой коэффициент прямой 15
 Угол поворота 101
 — отрицательный 101
 — положительный 101
 — наклона прямой 116
 Универсальная подстановка 212, 286
 Уравнение иррациональное 52

— тригонометрическое 121
 Уравнения равносильные 206
 Характеристика логарифма 95
 Формулы двойного угла 171, 172, 285
 — перехода от суммы к произведению 177, 178, 285
 — — от произведения к сумме 177, 178, 285
 — понижения степени 172, 286
 — приведения 129, 130, 285
 — сложения 163, 168, 285
 Функция 9
 — возрастающая 28
 — константа 15
 — косеканс 142
 — кусочно-заданная 24
 — логарифмическая 83
 — монотонная 28, 193
 — непрерывная 23, 192
 — нечетная 44, 201
 — периодическая 137, 202
 — показательная 71
 — секанс 142
 — степенная 42
 — четная 43, 200
 — убывающая 28
 Функции
 — взаимно обратные 51, 197
 — обратимые 51
 Целая часть числа 25

**Учебник входит в комплект по алгебре
и началам математического анализа
для 10–11 классов авторов Г. К. Муравина,
О. В. Муравиной и содержит:**

- обязательный и дополнительный
теоретический материал, соответствующий
базовой и профильной программам;
- разноуровневую систему упражнений;
- контрольные вопросы и задания к темам;
- ответы, советы и решения к заданиям;
- домашние контрольные работы;
- справочный материал и предметный указатель.

**Учебник предназначен
для качественного изучения курса алгебры
и начал математического анализа
на базовом и профильном уровнях.**

ISBN 978-5-358-12647-3



9 785358 126473



д р о ф а